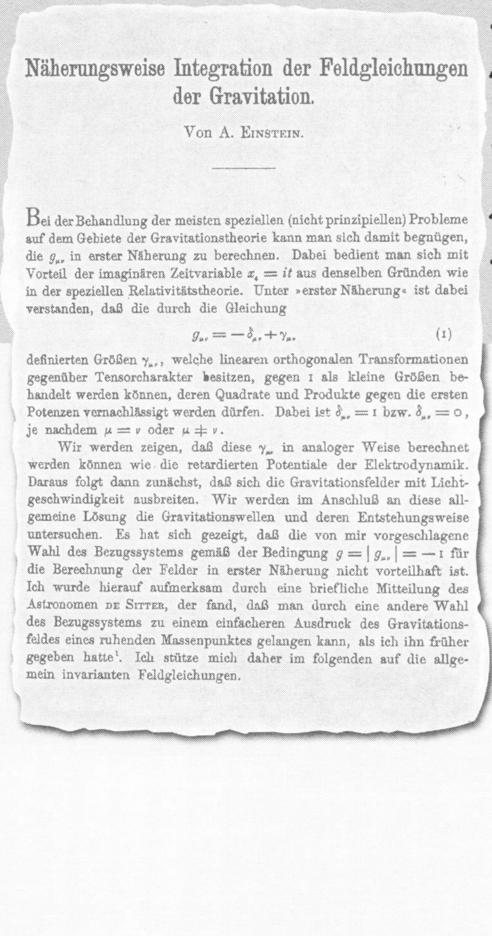
もうひとつの一般相対論入門

須藤 靖



Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

Bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Probleme auf dem Gebiete der Gravitationstheorie kann man sich damit begnügen, die $g_{\mu\nu}$ in erster Näherung zu berechnen. Dabei bedient man sich mit Vorteil der imaginären Zeitvariable $x_4 = it$ aus denselben Gründen wie in der speziellen Relativitätstheorie. Unter »erster Näherung« ist dabei verstanden, daß die durch die Gleichung

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \qquad (1)$$

definierten Größen $\gamma_{\mu\nu}$, welche linearen orthogonalen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen, gegen 1 als kleine Größen behandelt werden können, deren Quadrate und Produkte gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Dabei ist $\delta_{\mu\nu} = 1$ bzw. $\delta_{\mu\nu} = 0$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$.

Wir werden zeigen, daß diese $\gamma_{\mu\nu}$ in analoger Weise berechnet werden können wie die retardierten Potentiale der Elektrodynamik. Daraus folgt dann zunächst, daß sich die Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Wir werden im Anschluß an diese allgemeine Lösung die Gravitationswellen und deren Entstehungsweise untersuchen. Es hat sich gezeigt, daß die von mir vorgeschlagene Wahl des Bezugssystems gemäß der Bedingung $g = |g_{\mu\nu}| = -1$ für die Berechnung der Felder in erster Näherung nicht vorteilhaft ist. Ich wurde hierauf aufmerksam durch eine briefliche Mitteilung des Astronomen de Sitter, der fand, daß man durch eine andere Wahl des Bezugssystems zu einem einfacheren Ausdruck des Gravitationsfeldes eines ruhenden Massenpunktes gelangen kann, als ich ihn früher gegeben hatte[1]. Ich stütze mich daher im folgenden auf die allgemein invarianten Feldgleichungen.

日本評論社

まえがき

本書は，主として 2008 年から 2010 年まで，東京大学理学部 4 年生および大学院修士課程の 1 年生を対象として行った半年間の講義の内容をまとめたものである．

じつは私は 2005 年にも，同じく東京大学の講義をもとにして『一般相対論入門』という教科書を出版させていただいている．『一般相対論入門』は，将来相対論を専門としない人を対象として，相対論の心を伝えることを主目的として著したものである．一般相対性原理という考え方のもとで，運動方程式 (測地線の方程式) と場の方程式 (アインシュタイン方程式) がどのようにして導かれるか，さらにそれらがどのような意味においてニュートン力学の拡張となっているかをじっくりと解説するように努めた．幸い，同書はそれなりに読者層を得ることに成功し，現在に至るまで版を重ねることができている．しかし同書の出版後，再び一般相対論の講義を担当することになった際，今度はそれとは異なる視点から講義をしてみたいという気持ちが湧き上がってきたのである．

現代の宇宙物理学や天文学のさまざまな分野において，一般相対論の知識は不可欠なものとなっている．しかし私も含めて，相対論の専門家でもない限り，数学的な話はあまり必要でない．たとえば，ベクトルの平行移動などという概念は講義で教える側にとっても (したがって教わる側にはより一層) 面倒くさい．しかるに，一般相対論を宇宙物理学や天文学に応用する場合にはほとんど登場しない．だとすれば，そのような概念を学ばなければならないことによって相対論の理解をあきらめてしまう人がいるとすれば，もったいない話である．

そこで本書では，一般相対論のオーソドックスな教科書のスタイルを捨て，数学的な説明は実際の計算に必要な座標変換と微分の範囲にとどめた．そして，それを具体的な問題に適用し結果を得ることで相対論を習得する，という方針を採ってみた．

具体的には，一般相対論の基礎の解説に入る前の第 1 章で，4 次元時空とは何か，さらには GPS における一般相対論的効果を議論することで，概念の導入とその具体的な応用例を提示することから始めた．引き続く第 2 章は，一般相対論の数学的基礎のまとめであり，これは『一般相対論入門』の第 2 章から第 4 章の内容をより平易にかつコンパクトに説明し直したものとなっている．その後は，球対称時空，重力波，重力レンズ天文学という 3 つのテーマを選び，具体的な計算を通じて一般相対論を身につけても

らうことを目指した．この 3 つの章は互いに独立しているので，どのような順序で読んでもよい．

前書『一般相対論入門』と同じく，天下り式に複雑な結果だけを与えることは原則として避け，すべての式の導出の過程を省略せずに載せた．極論すれば，初学者は第 1 章と第 2 章を読むだけで相対論のエッセンスを会得できるはずだ．さらに第 3 章から第 5 章のどれか 1 つだけでも，自分で実際に計算を確認しつつ読み進めれば，実践的に一般相対論を理解できるようになるものと期待する．その意味では，対象としている読者は，一般相対論の初学者から，かつて学んだことはあるがほとんど忘れてしまったため再度学び直したい人，また宇宙物理学や天文学における具体的な応用例を通じて実践的に相対論を勉強したい人等，多岐にわたっている．いずれにせよ，すでに一般相対論に関する教科書や啓蒙書は数多く出版されている．本書はできるだけ既存のものとは異なる相補的なスタイルでの記述を試みたつもりである．一般相対論の背後に横たわる考え方は，狭い意味の物理学にとどまらない普遍性を有している．本書を通じてそれを具体的に感じ取って頂ける読者が少しでもいたとすれば筆者の望外の喜びである．

このように本書は，決して前書『一般相対論入門』の続編ではなく，あくまで相補的な役割の教科書なのである．したがって当初，書名も『一般相対論別入門』あるいは『一般相対論再入門』あたりを希望したものの，前書との違いが明確でなくなるという出版社の判断のため受け入れてもらえなかった．結果的に『もうひとつの一般相対論入門』という書名になったが，それが本書の内容をどこまで忠実に表現できているかどうか自信がない．この前書きはそれを補うために書いたものであるといってもよい．

最後に，本書のもととなった講義のティーチングアシスタントを担当してくれた東京大学大学院理学系研究科物理学専攻大学院生の藤井友香氏 (2008 年度) および平野照幸氏 (2009 年度) に感謝する．また 2010 年度のティーチングアシスタントである同大学院生柏木俊哉氏には，原稿を入念に読んでもらい多くのミスの指摘や有益なコメントを頂いた．前書『一般相対論入門』と同じく，担当編集者である高橋健一氏には，執拗な原稿の催促から TEX による細かい組版の指示に至るまで大変お世話になった．心から厚く感謝させて頂きたい．本書の執筆にあたってはできる限り誤りのないように努めたが，出版後に見つかった誤植等は

http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~suto/book

において随時お知らせするので，適宜参照するとともにあらかじめ御寛恕をお願いする．

2010 年 5 月

須藤靖

目　　次

●表紙・裏表紙に載っている論文について●

●表紙の論文

アインシュタインが一般相対論の近似解として初めて重力波の存在を発表した論文の最初のページ.

論文題名：Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation (重力場の方程式の近似積分).

出典：A.Einstein: Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 22 Juni 1916, pp.688-696 (1916 年 6 月 22 日に行われた物理・数学分科会会合の講演集のようなもので，同年 6 月 29 日に出版されたと書かれている．正式な文献名は Sitsungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaaften Berlin (1916), pp.688-696 であるらしい).

●裏表紙の論文

エディントンによる 1919 年の日食観測によって，一般相対論の予言どおり，光が太陽の重力を受けて湾曲することが証明された．このため一般相対論は一躍脚光を浴びたとされている．この効果は広い意味の重力レンズであるが，アインシュタインはこの論文において，遠方の星からの光がより手前にある星のごく近くを通過する際に，2 つの像が観測される，あるいはその光がより明るくなることを具体的に示した．この現象が実際に観測できる可能性についてはかなり悲観的に記述されているが，現在ではそれぞれ 強い重力レンズ，マイクロレンズと呼ばれ，重要な天文学的観測手法として定着している.

論文題名：Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field (重力場内の光の弯曲による星のレンズ的作用).

出典：A.Einstein: Science, New series vol. 84, no.2188 (December 4, 1936), pp.506-507.

第1章

4次元時空とシュワルツシルド計量

一般相対論は，3 次元空間と時間とをあわせた 4 次元時空[1]の幾何学性質によって重力を説明する理論である．むろん，一般相対論は重力の記述だけに限定されるものではなく，その考え方は物理学そのものの根底に流れる思想，あるいは，人間などという存在とは無関係に自然界が採用している摂理 (の数学的記述) であるともいえる．

一般相対論には，与えられた幾何学を持つ時空間のなかでの物質の運動を計算する，逆に，物質の分布を与えたときに時空間の幾何学を決定する，の 2 つの側面がある．厳密にはこの 2 つは独立ではなく，それらが互いに整合的になるように定式化する必要がある．しかしながら，現実の天文学的応用においては，近似的にこれらの作業を独立して行える場合も多い．特に前者に限れば，一般相対論の中核ともいえるアインシュタイン方程式はおろかテンソル算すら必要でないこともある．そこで本章では，一般相対論による記述の出発点である 4 次元時空の幾何学について簡単に学んだ後，シュワルツシルド時空を例として一般相対論の世界を概観してみよう．

1.1 線素と計量

2 次元平面ではいわゆる三平方の定理がなりたつ．この性質は，平面上に直交座標系を張り，その平面上で $(dx,\, dy)$ という無限小間隔だけ離れた 2 点間の距離の 2 乗は

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \tag{1.1}$$

で与えられる，と言いかえることができる．2 次元平面ではなく 2 次元曲面の場合に上式を一般化すれば，(x^1, x^2) と $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ の距離の 2 乗に対する最低次の

---

[1] 英語では space-time と呼ぶので，日本語の時空とは順番が逆である．ちなみに，宇宙という単語の語源は「四方上下謂之宇，往古来今謂之宙」という言葉に由来しているという説があり，それに従って宇宙を直訳すれば space-time の順序となる．

項は，dx^1 と dx^2 の 2 次形式：

$$(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}(dx^1)(dx^2) + g_{21}(dx^2)(dx^1) + g_{22}(dx^2)^2 \tag{1.2}$$

で与えられる．

相対論[2)]では，数多くの添字を持つ変数が頻繁に登場し，しかもその上下左右の位置には意味があるので，それらを勝手に移動させることはできない．したがって慣れるまでは混乱させられることが多い．たとえば，上式で dx^1, dx^2 の右上の添字 1 と 2 は座標の独立成分を区別するための添字であるが，$(ds)^2$ や $(dx^1)^2$ のように括弧の右上についている添字は 2 乗を意味する冪指数である．さらにひどいことに，通常は $(ds)^2$ ではなく，ds^2 と書くことになっている[3)]．ただし，慣れてくるとほとんど混乱することはなくなるのでしばらく我慢していただきたい．

これらを考えると，(1.2) 式はむしろ

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{1.3}$$

次のように書き直す方がわかりやすい．このとき ds を線素[4)]，g_{ij} をこの曲面の計量と呼ぶ．

計量は，場所の関数 $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2)$ であることを注意しておこう．(1.1) 式のように g_{ij} が場所とは無関係な定数となるのは，むしろ例外である．また，同じ 2 次元平面であっても極座標 (r, θ) を用いれば，その線素は

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 \tag{1.4}$$

のように (1.1) 式とは異なる形になる[5)]．つまり，計量の具体的な関数形を与えればその曲面の幾何学的性質が決まるのは事実だが，曲面を決めても座標の選びかたによってその計量の関数形は一意的ではない．

ところで (1.3) 式は

---

2) 物理の関係者は一般相対性理論をさして，一般相対論，あるいは単に相対論と呼ぶことが多い．専門家以外の一般の方々が相対論と聞くとむしろ特殊相対論を思い浮かべるかもしれないが，特殊な人々は一般相対論を思い浮かべる慣習になっているわけだ．

3) これは ds という量が初めに定義された後にそれを 2 乗したわけではなく，(1.2) の右辺がいきなり登場してそれを ds^2 と呼ぼう，ということから来ているのかもしれないが，慣れるまでは違和感が残ることであろう．

4) $ds^2 = (ds)^2$ は線素の 2 乗ということになるが，これもまた単に線素と呼ばれることが多い．

5) この例からも，一般には g_{ij} が場所に依存する関数となることが明らかであろう．

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\, dx^i dx^j \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{g_{ij}+g_{ji}}{2}\right) dx^i dx^j + \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{g_{ij}-g_{ji}}{2}\right) dx^i dx^j
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

と変形できる．2 つめの和は，添字 i と j について反対称 (入れ換えると符号だけが変わる) な項と対称 (入れ換えても同じ) な項との積からなっているので，i と j について和をとるとそれらが相殺して 0 となる．このように (1.3) 式に用いられる計量は，添字 i と j について対称な成分しか実際には寄与しない．そこで以下では，$g_{ij} = g_{ji}$ が成り立っているものとする[6]．

以上の 2 次元曲面に対する記述が理解できれば，それを時間 1 次元と空間 3 次元の 4 次元時空に拡張することは容易である．すなわち，線素に時間座標 t を取り込んで，

$$
ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{1.6}
$$

とすればよい．本書では，時間座標を $x^0 \equiv ct$, 空間座標を x^i $(i = 1, 2, 3)$, これらをまとめた 4 次元時空の座標を x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ のように記す．添字は i と μ に限るわけではなく，通常のラテン文字 (i, j, k, l, m など) は，空間座標を意味する添字で 1, 2, 3 のいずれかの成分を表わし，ギリシャ文字 (α, β, γ, μ, ν など) は，時間座標も含めて，0, 1, 2, 3 のいずれかの成分を表すものとする[7]．以下，特に断らない限り光速度を 1 とする ($c \equiv 1$) 単位系を用いる．したがって，時間も「長さ」の単位を持つことになる．

また相対論ではこのように添字に関して和をとることが頻繁に起るが，そのつど和の記号を書いていると面倒で仕方がない．そこで,「上下に繰り返された添字については必ず和をとる」という，いわゆる "アインシュタインの規則" を採用し，和の記号を省略する．その際に，空間座標を意味する通常のラテン文字については 1 から 3, ギリシャ文字については時間座標も含んで 0 から 3 の範囲で和をとることが暗黙のうちに仮定される．

この記法に従えば (1.6) 式を

$$
ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{1.7}
$$

---

6) そうでない場合でも，$(g_{ij} + g_{ji})/2$ をあらためて g_{ij} と再定義すれば，ds^2 を変えることなく $g_{ij} = g_{ji}$ を満たすことができるので一般性は失わない．

7) このような用法をさして相対論では「i は 1 から 3 を走る」,「μ は 0 から 3 を走る」と表現する．

のようにすっきりとした式に書き直すことができる．

相対論で取り扱う 4 次元時空の特徴は，時間に対応する計量成分 g_{00} が一般には負の値をとることである．特に，物質が何も存在しないときの時空は，ミンコフスキー計量とよばれる特別な形：

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

で与えられる．重力の効果を含まない特殊相対論では，このミンコフスキー時空：

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.9}$$

だけを考える．このような選びかたをさして $(-+++)$ の符号系と呼ぶ[8]．

このように 4 次元線素は正定値ではなく，ds^2 が負となる場合もある．具体的に速度 $\vec{v}$ で運動する粒子を考えると，無限小時間 dt だけ経過したときの変位は $(dx, dy, dz) = \vec{v}\, dt$ であるから，時空上で粒子が dt の時間に描く軌跡の 4 次元的な意味での距離の 2 乗は

$$ds^2 = -dt^2 + |\vec{v}|^2\, dt^2 = (-1 + v^2)\, dt^2 < 0 \tag{1.10}$$

となり[9]，やや気持ちが悪い．これは，ds^2 を $(ds)^2$ という意味にはとらずその右辺から定義される量を示す単なる記号であると解釈しておけば別に問題はないのであるが，場合によっては

$$d\tau^2 \equiv -ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.11}$$

で定義される $d\tau$ を用いたほうが便利なこともある．この τ は固有時間とよばれる[10]．粒子が静止している場合 $(dx = dy = dz = 0)$ には，τ は t と一致する．

---

[8] 相対論関係の分野ではこの符号系をとることが普通だが，素粒子論の分野では $(+---)$ の符号系を採用することが多いようだ．すなわち，$ds^2 = \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ と定義するのである．文献を比較する場合に混乱のもととなるのだが，歴史的な慣用の違いなので仕方がない．物理的には空間部分の線素を表す $g_{ij}dx^i dx^j$ は正定値であるほうがすっきりするので，$(-+++)$ のほうが違和感がないかもしれない．数学では計量が正定値のものをリーマン幾何学と呼ぶらしいので，厳密にいえば一般相対論は擬リーマン幾何学に分類されるのだが，物理学では単にリーマン幾何学と呼ばれている．いずれにせよ空間部分の線素は正定値あるいは全体の符号を変えた負定値であるべきなので，$(-+-+)$ といった符号系は登場しない．

[9] 光速度 c を 1 とする単位系を用いているので，あらゆる粒子の速度 v は $v < 1\ (= c)$ である．

[10] これと区別するために t を座標時間とよぶことがある．

1.2 シュワルツシルド時空の性質

1.2.1 シュワルツシルド計量

前節は計量を $g_{\mu\nu}$ と記しただけの一般論にすぎず，それ以上具体的な計算をすすめることはできない．どのような場合にどのような 4 次元時空の計量が実現されるかを決めるのが次章で述べるアインシュタイン方程式だが，そこに到達するにはいささか準備が必要である．一方，$g_{\mu\nu}$ の具体的な関数形から出発すれば，その時空における粒子の運動や光の経路の解析などは，ほとんど一般相対論の知識無しに進めることができる．そこで，シュワルツシルド時空というもっとも代表的なアインシュタイン方程式の厳密解をとりあげて，曲がった空間という概念を考察してみよう．

原点 $(r=0)$ に質量 M の質点がある以外はいたるところ真空であるという仮定のもとでアインシュタイン方程式を解いて得られる厳密解は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) \tag{1.12}$$

となり，シュワルツシルド計量あるいはシュワルツシルド時空と呼ばれる[11)]．この解は r が

$$r_{\rm s} \equiv 2GM = \frac{2GM}{c^2} \approx 3{\rm km}\left(\frac{M}{M_\odot}\right) \tag{1.13}$$

の値をとる場所で，$g_{00} = 0$, $g_{rr} = \infty$ となってしまう ($M_\odot \approx 2 \times 10^{33}$g は太陽の質量を表す)．この値をシュワルツシルド半径と呼ぶ．しかし後述するように，これは座標系の取り方に起因する見かけの特異面とよぶべきもので，物理的に意味のある量が発散するといった意味での真の特異点ではない．一方，$r=0$ は無限遠の観測者にとって質量 M の質点が存在する特別な点で，本当の特異点に対応する[12)]．

太陽は，そのシュワルツシルド半径 3km に比べてずっと大きな領域半径 $R_\odot \approx$ 70 万 km までひろがったガス分布を持っており，$r < R_\odot$ ではそもそもこのような真空解は適用できない．逆に言えば，この解が $r \approx r_{\rm s}$ 程度まで物理的に意味を持つような天体は，その質量に比してとてつもなく小さいサイズを持つ場合に限る．そのような極限的な状況が現実に存在するとは思いがたいかもしれない．しかし驚くべきことに，現代の天文学は，そのような高密度コンパクト天体の存在を明らかにしてきた．ほとん

---

11) その導出は 3.6 節，あるいは拙著『一般相対論入門』(日本評論社，2005 年：以下,『入門』として引用) 第 5 章を参照.

12) 詳しくは第 3 章，および『入門』第 5 章で議論されている

どの銀河の中心部には $10^6 M_\odot$ 程度のブラックホールが存在していると考えられているし，遠方宇宙にあるクエーサーと呼ばれる天体は，$10^9 M_\odot$ 程度の巨大ブラックホールの中心に外側から物質が落ち込むことによって光り輝いている．つまりいまやブラックホールは仮想的で稀な天体ではなく，日常的な天文観測ターゲットなのである．

1.2.2 シュワルツシルド計量の動径座標の意味：曲がった空間

シュワルツシルド計量：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_\mathrm{s}/r} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{1.14}$$

において，動径座標 r は原点を中心として $4\pi r^2$ の表面積をもつ (あるいは大円の周の長さが $2\pi r$ となる) 球面の位置を特徴づけるパラメータ (あるいはラベルと言ってもよい) の意味で用いられている．ところが，たとえば地球の表面に沿って等緯度の点を結んだ小円の周の長さ ℓ は，それらの点から大円に沿って測った北極までの距離 χ と，$\ell = 2\pi\chi$ という関係にはない．このように，一般にはユークリッド幾何学[13)]の場合とは異なり，r を原点からの距離という意味での “半径” と同一視することはできない．

シュワルツシルド計量の場合に，上述の意味を具体的に考えてみよう．動径座標 r と $r + \Delta r$ の 2 つの球面間の動径方向の距離を $\Delta\ell$ とする．$\Delta r \ll r$ とすれば，(1.14) 式の動径方向の線素が実距離であることより

$$\Delta\ell = \frac{\Delta r}{\sqrt{1 - r_\mathrm{s}/r}} > \Delta r. \tag{1.15}$$

この式を用いて $r_2 > r_1 \geq r_\mathrm{s}$ の場合の，r_1 に対応する球面と r_2 に対応する球面の間の動径方向の距離 ℓ_{12} を求めてみる (図 1.1 参照)．$x \equiv r_\mathrm{s}/r$ と置くと

$$\ell_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - r_\mathrm{s}/r}} = r_\mathrm{s} \int_{r_\mathrm{s}/r_2}^{r_\mathrm{s}/r_1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}}. \tag{1.16}$$

ここで，積分公式：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x}} = -\frac{\sqrt{1-x}}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right) \tag{1.17}$$

を用いれば

---

13) ユークリッドは紀元前 300 年ごろにギリシャで活躍した数理科学者であるが，その生涯の詳細は不明．最近，高校の世界史では人名の原音主義にしたがってエウクレイデスと教えられているらしい．私のように過去の教育を受けたものは，エウクレイデスといわれてもまったくピンとこない．幸い (?)，数学や物理ではまだユークリッドと呼ぶほうが一般的であるようだ．

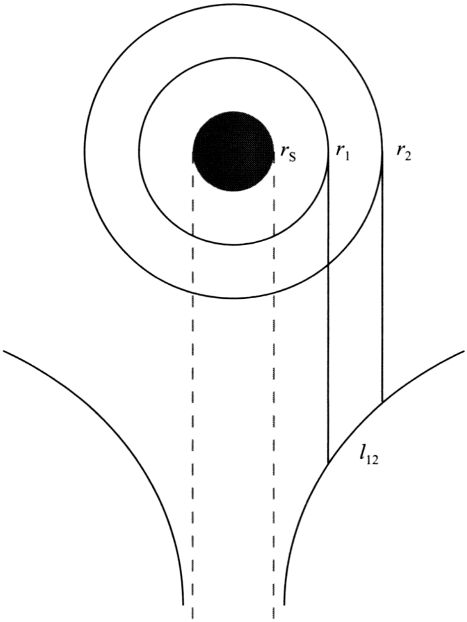


図 1.1 シュワルツシルド計量の歪みの概念図．次元を 1 つ下げて 2 次元曲面として描いたイメージ．

$$\begin{aligned}
\ell_{12} &= r_{\mathrm{s}}\left[-\frac{\sqrt{1-x}}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)\right]_{r_{\mathrm{s}}/r_2}^{r_{\mathrm{s}}/r_1} \\
&= r_2\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_2}-r_1\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_1} \\
&\quad +\frac{r_{\mathrm{s}}}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_1}}{1+\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_1}}\frac{1+\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_2}}{1-\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_2}}\right) \\
&= r_2\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_2}-r_1\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_1}+r_{\mathrm{s}}\ln\frac{\sqrt{r_2}+\sqrt{r_2-r_{\mathrm{s}}}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_1-r_{\mathrm{s}}}}. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

特に $r_2 > r_1 \gg r_{\mathrm{s}}$ の場合を考えると

$$\ell_{12} \approx r_2 - r_1 + \frac{r_{\mathrm{s}}}{2}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (1.19)$$

であるから，確かに $\ell_{12} > r_2 - r_1$ となっている．また，$r_1 = r_{\mathrm{s}}$ の場合でも ℓ_{12} は発散せず，有限の値

$$\ell_{12} = r_2\sqrt{1-r_{\mathrm{s}}/r_2} + r_{\mathrm{s}}\ln(\sqrt{r_2/r_{\mathrm{s}}} + \sqrt{r_2/r_{\mathrm{s}}-1}) \qquad (1.20)$$

にとどまることを注意しておこう．

中心からの距離 r とその周の長さ ℓ が $\ell = 2\pi r$ でない場合には，それらを 2 次元平面上に描くことはできない．シュワルツシルド時空を図 1.2 のように表現することがあるが，これは空間を 3 次元ではなく 2 次元にすることで，空間の歪みを可視化したものである．

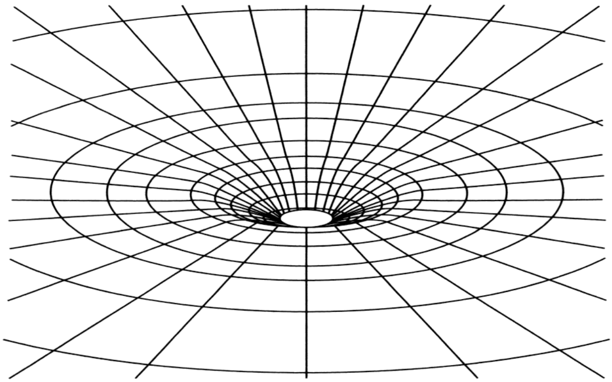


図 1.2　2 次元曲面上で表現したシュワルツシルド時空．

1.2.3　動径方向に進む光

$r = r_\mathrm{s}$ という面の性質を調べるために，動径方向 $(d\theta = d\varphi = 0)$ に進む光の振る舞いを考えてみよう．光の運動方程式は，2.4 節で説明する測地線方程式で記述できるのだが，ここではより直感的に考えてみる．まず (1.14) 式を

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - r_\mathrm{s}/r} \equiv -dT^2 + d\ell^2 \tag{1.21}$$

のように書いてみる．(1.21) 式の dT は動径座標 r の位置で静止している観測者が測定する (固有) 時間間隔である．また $d\ell$ は，1.2.2 節で述べた動径方向の距離である．動径座標 r に静止している観測者が測定する光の速度は c (今の単位系では 1) であるから，$d\ell = dT$ となる．このことより，動径方向に進む光の経路は $ds^2 = 0$ となることが予想される．これを dt と dr を用いて書き直せば

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right) \quad (\text{ただし } r > r_\mathrm{s}) \tag{1.22}$$

となる．右辺の複号は，外側に進む光が正，中心に進む光が負，となる．(1.22) 式を用いて，光が $r = r_2$ $(> r_\mathrm{s})$ から中心方向にある $r = r_1$ $(< r_2)$ に到達するためにか

かる時間を計算すると，

$$\Delta t_{12} = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{1 - r_\mathrm{s}/r} = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{r_\mathrm{s}/r}{1 - r_\mathrm{s}/r}\right) dr$$

$$= r_2 - r_1 + r_\mathrm{s} \ln \frac{r_2 - r_\mathrm{s}}{r_1 - r_\mathrm{s}} \tag{1.23}$$

となる．したがって，(i) r_2 ($> r_\mathrm{s}$) から発せられた光が r_s に到達するまでの時間，および (ii) r_s から発せられた光が r_2 ($> r_\mathrm{s}$) に到達するまでの時間，はともに無限大になることがわかる．

このように $r = r_\mathrm{s}$ は，外部の観測者にとって観測可能な領域を分断する境界面となっている．この事実から，$r = r_\mathrm{s}$ を事象の地平線 (event horizon) と呼ぶ．さらに，光が $r = r_\mathrm{s}$ から無限大の時間かかって外部の観測者に到達したとしても，その波長は無限大となり，何も見えない．この意味で，$r \leq r_\mathrm{s}$ の領域を (シュワルツシルド) ブラックホール[14)]と呼ぶ．ところで，少なくともここで求めた解は，$r = 0$ (にある質点) 以外はいたるところ真空という条件から導き出されたことを注意しておこう．つまり，ブラックホールはそのシュワルツシルド半径が何か固い境界となっていてその中に物質がつまっている，といったイメージのものでは決してない．

この $r = r_\mathrm{s}$ という境界を持つブラックホールの存在は，ニュートン力学においてもその脱出速度 v_esc が光速度を超えないという条件：

$$\frac{GmM}{r} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{esc}^2 < \frac{1}{2} mc^2 \Longrightarrow r > \frac{2GM}{c^2} = r_\mathrm{s} \tag{1.24}$$

から，係数も含めて偶然正しい答えが得られることは興味深い．ただし，一般相対論ではあらゆる物は $r = r_\mathrm{s}$ の内から外へは飛び出せないことを主張しているのに対して，ニュートン力学では $r = r_\mathrm{s}$ の内から外へ飛び出すことは可能であるが無限遠方へは到達できないことを主張している点において，その物理的意味はかなり異なっている．

1.2.4　ブラックホールの密度

シュワルツシルド解に代表されるブラックホールは，途方もなく高密度で強重力であるというイメージがある．しかしじつは必ずしもそうではない．このことは，ブラックホールとは，対応する領域のサイズが (1.13) 式のシュワルツシルド半径以下であるという条件のみで定義されていることからも理解できる．密度が高いという条件はどこ

---

14) ブラックホールという名前は，プリンストン大学のジョン・アーチボルド・ホイーラーがつけたものとされている．彼は 2008 年 4 月 13 日に 96 歳で亡くなった．いわずと知れたリチャード・ファインマン，さらには量子力学の多世界解釈で有名なエヴァレットの指導教官でもある．

にもないのである．

これをより具体的にみるために，一様な質量密度 ρ をもつ半径 R, 質量 M の球対称物体を考えてみる．この半径 R がシュワルツシルド半径と一致するという条件を課せば,

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3 = \frac{4\pi}{3}\rho\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^3. \tag{1.25}$$

したがって，M と R が ρ の関数として

$$M = \frac{c^3}{2G}\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \approx 1.35\times 10^8\sqrt{\frac{1\,\mathrm{g/cc}}{\rho}}\,M_\odot, \tag{1.26}$$

$$R = c\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \approx 4\times 10^{13}\sqrt{\frac{1\,\mathrm{g/cc}}{\rho}}\,\mathrm{cm} \tag{1.27}$$

と書ける．

質量密度として地球大気の平均密度である $10^{-3}\mathrm{g/cm^3}$ を (1.26) 式に代入してみると

$$M \approx 4.3\times 10^9\,M_\odot, \quad R \approx 1.3\times 10^{15}\,\mathrm{cm} \sim 100\,\mathrm{AU}. \tag{1.28}$$

海王星の軌道長半径は約 30AU であり[15)]，100AU は小惑星や彗星の起源であると考えられているエッジワース・カイパーベルトまでの距離に対応する．したがって，仮に地球大気程度の密度をもつ物質が太陽系の端である 100AU までひろがって満たしているとすれば，外側の観測者にとってはブラックホールということになる．

この例はあまり現実的ではないと思うかもしれない．そこで次に宇宙の平均密度である $\rho \approx 10^{-29}\mathrm{g/cm^3}$ を代入してみると

$$M \approx 4.3\times 10^{22}\,M_\odot, \quad R \approx 1.3\times 10^{28}\,\mathrm{cm} \sim 4000\,\mathrm{Mpc}. \tag{1.29}$$

が得られる[16)]．この値は宇宙年齢である $t_0 \approx 137$ 億年かけて光が進む距離：

$$\begin{aligned} ct_0 &\approx 3\times 10^{10}\mathrm{cm/s}\times 137\times 10^8\times 3\times 10^7\mathrm{s} \\ &\approx 1.3\times 10^{28}\,\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{1.30}$$

とほぼ一致している．つまり，我々を中心とする領域は，宇宙年齢かけて光が進む距離

15) 1AU (Astronomical Unit：天文単位) は太陽と地球の平均距離に対応する長さの単位で約 1.5 億 km.

16) pc (パーセク) は長さの単位で約 3.09×10^{18}cm. 我々の銀河系円盤内での星同士の平均間隔程度である．Mpc(メガパーセクは) 100 万 pc で，宇宙の中の銀河同士の平均間隔程度の長さに対応する．

以遠から見るとブラックホールとなっているのだ (3.6.2 節も参照のこと).

観測的に知られているブラックホール候補天体は数 $M_\odot$ から $10^9 M_\odot$ 程度のコンパクト天体であり，きわめて高密度である．しかし，上述の議論によれば，どんなに低密度でも十分ひろがった領域をその外部から見ればブラックホールになりうることがわかる．実際，我々自身ある意味ではブラックホールの内部に住んでいるとも解釈できる．したがって，ブラックホールの中で “快適に” 暮らす[17]ことすら可能である．

1.3 GPS とシュワルツシルド時空

今や GPS (Global Positioning System) は，カーナビや携帯電話などさまざまな機器に組み込まれ日常生活を支える重要な役割を持つようになった．GPS 衛星は 24 基が高度 20,200km, 軌道傾斜角 55 度，周期 12 時間の軌道上にある．それ以外にも 7 基が別軌道上にあり，遮るものがない限り地上のどこからでも同時に 6 基以上の衛星が視界に入る．

GPS 衛星からの信号には，衛星に搭載された原子時計からの時刻と衛星の軌道データが含まれている．仮に地上の GPS 受信機が正確な時計を搭載しているとすれば，3 個の GPS 衛星からの信号を受け取り，その信号到達までの時間差からそれらまでの距離を決定することで，GPS 受信機の位置座標が推定できる．しかし実際には，地上の GPS 受信機に搭載されている時計は，あまり正確ではない．そのため 4 つの GPS 衛星からの信号を受信することで，GPS 受信機の時刻の較正をも同時に行うようになっている．

さて，実用に供する GPS システムをつくるには，一般相対論の効果を考慮することが不可欠であることはよく知られている．この事実は，日常生活とは無縁な理論的意義しかないと思われがちな一般相対論が実際に「役に立つ」ことを示す例として，しばしば引きあいに出される．そこで質量 $M_\oplus$ の地球を原点としたシュワルツシルド計量：

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM_\oplus/r} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2\right) \qquad (1.31)$$

を座標系に選んで具体的に計算することで，一般相対論の実用的な意義を堪能してみたい．

地球を，半径 $r_\oplus$, 角速度 $w_\oplus$ で自転している一様球であると近似する．簡単のため

---

[17] もしも常日頃そう感じている人にとっては，という話である．世の中には辛いこともまた数多いことは認めざるを得ない．しかしそれは物理学の問題ではなく各人の人生観に関わる価値判断である．

に，地球の赤道上 ($\theta = \pi/2$) で静止している車 (に搭載されたカーナビ) を考える．地球に貼りついた座標系から見ればその車自身は運動していないので，車の中で測定する時間 $dt_\oplus$ は (1.31) 式の左辺である固有時間そのものである．一方，この車を無限遠で静止している観測者が観測したとすれば，地球の自転に伴う φ 方向の運動が見出される (r 方向と θ 方向には運動していない) ため，

$$dt_\oplus^2 = \left[1 - \frac{2GM_\oplus}{r_\oplus} - r_\oplus^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] dt^2$$
$$= \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{r_\oplus} - r_\oplus^2 w_\oplus^2\right) dt^2 \tag{1.32}$$

が成り立つ．ここで dt は無限遠の観測者が測定する座標時間である．

次に，地球の中心から $r_{\rm gps}$ だけ離れた軌道を角速度 $w_{\rm gps}$ で公転している GPS 衛星が測定する時間 $dt_{\rm gps}$ を考える．(1.32) 式と同様にして $dt_{\rm gps}$ は

$$dt_{\rm gps}^2 = \left(1 - \frac{2GM_\oplus}{r_{\rm gps}} - r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2\right) dt^2 \tag{1.33}$$

となるので，(1.32) 式との比をとると

$$\frac{dt_\oplus}{dt_{\rm gps}} = \sqrt{\frac{1 - 2GM_\oplus/r_\oplus - r_\oplus^2 w_\oplus^2}{1 - 2GM_\oplus/r_{\rm gps} - r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}}$$
$$\approx 1 + \frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} + \frac{r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} - \frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2} \tag{1.34}$$

と近似できる．じつはこれだけで本質は尽きている．後は具体的に数値を評価すればよい．

(i) $GM_\oplus/r_\oplus$

地球の質量と半径はそれぞれ

$$M_\oplus \approx 5.974 \times 10^{27}\text{g}, \quad r_\oplus \approx 6378\text{km} \tag{1.35}$$

なので，

$$\frac{GM_\oplus}{r_\oplus} \approx \frac{6.67 \times 10^{-8} \times 5.974 \times 10^{27}}{6.378 \times 10^8 \times (3.0 \times 10^{10})^2} \approx 6.9 \times 10^{-10}. \tag{1.36}$$

(ii) $GM_\oplus/r_{\rm gps}$

GPS 衛星は高度 20,200km の軌道を周期 12 時間で公転している．したがって，

$$r_{\rm gps} = 26578\text{km} \approx 2.66 \times 10^9\text{cm} \tag{1.37}$$

であるから，

$$\frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} \approx \frac{6.67\times10^{-8}\times5.974\times10^{27}}{2.66\times10^{9}\times(3.0\times10^{10})^2} \approx 1.66\times10^{-10}. \qquad (1.38)$$

(iii) $r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2/2$

GPS 衛星は地球の重力だけによるケプラー運動をしていると近似してよいから

$$\frac{r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}{2} = \frac{GM_\oplus}{2r_{\rm gps}} \approx 8.3\times10^{-11}. \qquad (1.39)$$

(iv) $r_\oplus^2 w_\oplus^2/2$

同様にして,

$$\frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2} = \frac{GM_\oplus}{2r_\oplus} \approx 3.5\times10^{-10}. \qquad (1.40)$$

(1.34) 式より

$$\begin{aligned}\frac{dt_\oplus}{dt_{\rm gps}} - 1 &\approx \frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} + \frac{r_{\rm gps}^2 w_{\rm gps}^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus} - \frac{r_\oplus^2 w_\oplus^2}{2} \\ &\approx \frac{3}{2}\left(\frac{GM_\oplus}{r_{\rm gps}} - \frac{GM_\oplus}{r_\oplus}\right) \approx -7.9\times10^{-10}. \qquad (1.41)\end{aligned}$$

つまり，地上の時計は GPS 衛星上の時計に比べて 1 日あたり 68 マイクロ秒 ($=7.9\times10^{-10}\times24\times3600$ 秒) だけ遅れることになる．

GPS 衛星に搭載されている原子時計は高精度のもので 10^{-15}s/s 程度の相対誤差が達成されているが，GPS 信号を受信する地上側でクォーツ時計を用いている場合，その相対誤差は 10^{-5}s/s 程度にもなる．

したがって，GPS を用いた距離決定精度を決める要因として (1) GPS 衛星が搭載している原子時計の精度 $\sim10^{-15}$s/s, (2) 一般相対論的効果 $\sim10^{-9}$s/s, (3) 地上の時計の精度 $\sim10^{-5}$s/s が考えられる．24×3600 秒 $\times$ 30 万 km/秒 倍して 1 日あたりのカーナビの位置の不定性に直せば，それぞれ 3cm, 30km, 30 万 km となる．これに対して現在の GPS の精度は数 10m 程度とされている．

当然まず (3) を補正する必要がある．地上の電波時計は，原子時計に基づいた電波信号を毎日受けることで内部のクォーツ時計の誤差を較正しているが，それだけでは役に立たないことは自明である．したがって，GPS 衛星の原子時計の精度を生かすべく，3 つではなく 4 つの GPS 衛星からの信号を受信し，位置の 3 自由度に時刻を加えた 4 変数を求めることによってこの問題を回避しているわけだ．

その次に重要となるのが (2) の相対論的効果であり，これを補正しなくてはわずか 1 日後に 30km もの不定性が生まれてしまい，カーナビで目的地に到達することは事実

上不可能となる．幸い，この効果は (実用上の目的からみればまだきわめて定性的なレベルの議論でしかないが) 上記の計算によって補正可能であることがわかる．逆に言えば，現代の我々の日常生活がすでに一般相対論の信頼性を定量的に検証する舞台となっているわけだ[18]．

しかし，さらに強調したいことはニュートン力学の偉大さである．この一般相対論的補正をする上では，GPS 衛星の軌道が正確に決まっていることが大前提である．そしてその軌道決定精度を保証しているのは天体力学 = ニュートン力学に他ならない．世間にはびこっている怪しげな一般書のなかに「一般相対論の登場でニュートン力学は葬られた」などという見出しをみることがあるが，そのような言いかたこそ一刻も早く葬り去るべきである[19]．このように，一般相対論はより広い意味で，ニュートン力学の普遍性と定量的予言力に支えられている．

[18] ただしここでは時計の進みがシュワルツシルド計量によって決まっているという点だけが本質で，後述のアインシュタイン方程式を直接使っているわけではない (もちろんシュワルツシルド計量はアインシュタイン方程式を解くことによって導かれたものではあるが)．その意味では，一般相対論そのものの検証というのは少し言い過ぎかもしれない．

[19] 商業的利益のみを優先させる一部の出版社には，そのように読者を刺激する言いかたを著者にお願いしてくる傾向がある．科学に興味を持つ読者を増やすことと，ある程度正確な情報を伝えることのバランスをとることは難しい．前者の観点からすれば，この程度の見出しはほとんど無害とよっていいレベルなのであろう．いわゆる「大手」出版社や「大手」テレビ会社であっても，科学的にまったくナンセンスな内容を無批判にしかも派手にタレ流すことで，人々の科学リテラシーを日夜歪めることに貢献している例は珍しくもなんともない．こちらのほうがずっと根の深い本質的な問題である．その類の関係者が，このような地味な本の脚注を注意深く読んでいる可能性はきわめて低いとは思うが，一応言っておこう．「関係者，出て来い！」

第2章

一般相対論の基礎

ニュートンの第 1 法則は「力を受けていない物体が静止あるいは等速直線運動をする」ように観測される座標系 (慣性系) が存在することを主張する．この慣性系における粒子の運動方程式 (ニュートンの第 2 法則) は，定速度の並進運動に対応するガリレイ変換に関して不変である．一方，電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式は，ローレンツ変換に関して不変ではあるが，ガリレイ変換に関しては不変でない[1)]．

ローレンツ変換は光速度が無限大であるという近似のもとで，ガリレイ変換に帰着する．したがって，物理法則がローレンツ変換のもとで不変であることを要請するのが特殊相対性原理である．この特殊相対性原理と光速度不変の原理からつくりあげられた[2)]のが特殊相対論である．結果としてニュートン力学は若干の修正を余儀なくされる．

ところで，ローレンツ変換はミンコフスキー座標を用いて表示した 4 次元時空間の世界点の座標成分 (t, x) を，別の異なるミンコフスキー座標系を用いたときの成分 (t', x') と結び付けるものであると解釈できる．つまりこれは，時空間における座標変換の一種である．しかし，物理法則がローレンツ変換という特定の座標変換のもとでのみ不変であるというのは奇妙ではないか，と気になってくる．むしろ，物理法則はあらゆる座標変換のもとで不変なのではないか，と考えるほうが自然ではあるまいか．これが一般相対性原理であり，そのもとでつくられたのが一般相対論である[3)]．

ここまではどちらかと言えば，哲学あるいは価値観とも言うべき主張に過ぎない．そ

---

1) 本書ではニュートン力学から特殊相対論に至る議論は行わない．興味がある読者は，たとえば『入門』第 1 章や拙著『解析力学・量子論』(東大出版会，2008 年) 第 2 章を参照のこと．

2) 自然の摂理であるからそもそも存在していたわけで，アインシュタインがつくったのではなく発見した，と言う方が適切かも知れない．

3) これもまた発見されたという方が適切なのであろう．

れを物理学に組み込むためには，どうしても数学を用いた定式化が必要となる．一般相対論を初めて学ぶときにはこの部分が障害となることが多いようであるが，詳しい説明はたとえば『入門』第 2 章に譲り，本章では思い切ってエッセンスだけにしぼって丁寧に説明してみる．

2.1　物理量の表現：ベクトル

相対論でいうところの物理量[4]とは，座標変換に対するある特定の変換則にしたがうものをさす．これをテンソルといい，それが何であるかを具体的に説明するのが本章の目的である．

4 次元時空上の任意の点 P で局所的に定義された物理量を考えてみよう．そもそも時空自身が持つ (幾何学的) 性質は，その上で人為的に設定する座標軸や座標成分などというものとは無関係なはずである．しかし，そこで定義された物理量に関して何か具体的な計算をしようとすれば，残念なことにどうしても座標系を設定してその成分の値を利用するはめになる．

まずこの節では，点 P で定義された物理量 $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ が 4 つの値の組で記述できる場合に限って議論する．そのような物理量をテンソルの中でも特にベクトルとよぶ．たとえば，粒子の 4 元速度や 4 元運動量，電磁場ポテンシャルなどはベクトルの例である[5]．

通常，このベクトルを $\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ のように成分表示で書き下すことが多いが，これは誤解を生む記法である．成分は，座標系を設定して初めて値が決まるものであり，この記法の場合，どのような座標系をとっているのかが明示されていない．暗黙のうちに仮定されているのである．以下では，物理量という抽象的な概念と，それを成分という具体的な値の組によって表現する方法との関係について説明してみた

[4] あくまで「相対論で用いられる狭義の」物理量という意味であることを注意しておこう．たとえば，ある粒子の座標は物理量であるように思われる．通常，座標は空間 3 次元に対応して 3 成分を持つ空間ベクトルで表される．しかし，相対論が取り扱うのは時間をも含めた 4 次元時空であり，3 次元座標は物理量ではない．

[5] 一般相対論では，時空の座標を示すときに x^μ という表現を多用する．これはあくまで時空上のある一点を指定するラベルであり，座標原点とその点を結ぶ位置ベクトルという意味で用いられているわけではない．しかしながら，形式的には原点から有限距離にある点までの「位置ベクトル」ということになる．奇妙に思えるかも知れないが，この「位置ベクトル」は一般相対論でいうところのベクトルではない．位置ベクトルは，時空間の異なる 2 点を指定して初めて決まるものであり，点 P だけで局所的に定義されてはいないからである．

い．ベクトルの例が理解できれば，テンソルで表現されるより一般の物理量についてもほぼ同様である．

2.1.1 ベクトルの基底と成分

3 次元空間における単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を一般化して，4 次元時空間上の任意の点 P で定義された線形独立な 4 つのベクトルの組 $\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})$ を基底 (基底ベクトル) と呼ぶ．この基底の選び方が，その点での座標系の選び方に対応する．一般相対論で登場する物理量は，あくまで時空間の一点で局所的に定義できる量でなくてはならない．同様に，$\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})$ も時空の各点 P ごとに定義され，さらには異なる点での選び方の任意性もまた保証されるべきである．デカルト座標における単位ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は考えている点には依存せず，空間のあらゆる場所で同じであるが，これはあくまで例外だ．

点 P におけるある物理量がベクトル $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ で表現できるとき，その成分 $A^\mu(\mathrm{P})$ を

$$\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = A^\mu(\mathrm{P})\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P}) \tag{2.1}$$

によって定義する．言いかえれば，点 P で定義されるベクトル $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ を，その点での基底 $\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})$ の線形結合として展開したときの係数 $A^\mu(\mathrm{P})$ を成分と呼ぶ．

そもそも物理量とは本来そのような基底とは無関係に存在する，というのが一般相対論の根底に流れる思想である．といってもそのような抽象的なことを言うだけでは，具体的に何か計算することはできない．そのために，いやいやながら基底を定義し，その基底を用いて展開した物理量の成分をその物理量と同一視することで計算を可能とするのである．この考え方に従えば，もともと第一義的な存在ではない基底を，時空の各点でどのように選ぼうが物理的結果は変わるはずがない．このことを言い換えたものが，どのような座標系から観測しようと物理法則は同じであるという「一般相対性原理」だ．

いずれにせよ，一般相対論ではベクトル (より一般にはテンソル) の「成分」と「基底」を明確に区別して理解することが本質的である．決して「ベクトル = 成分」ではない．仮に基底を完全に省略した記法が用いられている場合でも，そこでは暗黙のうちに「ベクトル = 成分 + 基底」という理解が前提となっているのである[6)]．その理解が正しくなされていないと，一般相対論における座標変換や微分という操作がきわめて人為的なものに感じられ，いつまでたっても親近感がわかないままであろう．

---

6) とはいっても，実際にはベクトルの成分 A^μ をさしてベクトルと呼ぶことのほうがむしろ普通であり，かくいう本書でも次章以降はそのような慣用にしたがう．もちろん基礎さえ理解していれば，それは実用上問題ないどころか，煩雑さを回避する意味では重要であるが，わかった上で使うのとわからずにただ使っているのとは大違いである．

2.1.2 基底変換と座標変換

一般相対論では「一般座標変換」という言葉が頻繁に登場する．今まで述べてきた成分と基底という表現の場合と同様に，この「座標変換」の意味もやや混乱しやすい．本来は「基底変換」と呼ぶ方が適切ではないかと思う．繰り返すが，相対論の根底に流れる思想は「物理量は座標系に無関係」ということである．基底を決めそのもとで物理量の成分を書き下すのは，あくまで便宜的な手段に過ぎず，そのようなプロセスなしですませるものならばそれに越したことはない．したがって，物理法則が (本来は必要ないはずの) 座標系に依存することはありえない．

たとえば「ある座標系における点 P が別の座標系では点 P′ に変換される」という表現は，相対論での座標変換という考え方からすれば，間違いではないにしても誤解を招きやすい．そもそも点 P は座標系などに依らない概念である．座標変換によって P が P′ に移るとは，幾何学的には同じ点であるにもかかわらず，異なる座標系で表現したときにはその位置を表す成分の値が異なってくる，という意味なのであり，異なる点に移るわけではない．このことを具体的に表現してみよう．

時空上の点 P において定義された物理量がベクトル $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ で表現されているものとする．点 P において定義された異なる基底の組，$\boldsymbol{e}_\mu(\mathrm{P})$ と $\boldsymbol{e}_{\mu'}(\mathrm{P})$, を選ぶ．$\boldsymbol{A}$ は (以下，混乱を招くおそれがない場合には P を省略する)，基底の選びかたには依存しないから

$$\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu = A^{\mu'} \boldsymbol{e}_{\mu'} \tag{2.2}$$

が成り立つ[7)]．

---

7) 本書では異なる基底を区別するために，添字に ′ をつけることにする．一方，添字ではなく変数そのものに ′ をつけて

$$\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu = A'^\mu \boldsymbol{e}'_\mu$$

とする流儀を採用している文献も多い．ただ「物理量はあくまで $\boldsymbol{A}$ であり，基底をどのように選ぼうと $\boldsymbol{A'}$ になるわけではない」という思想を明確に示すには，その成分を $(A')^\mu$ と書くのではなく $A^{(\mu')}$ と記述したほうがよいように思う (ここでは記法の意図を強調するためにあえて括弧をつけた)．さらに，添字に ′ をつけておくことで，どちらの座標系で見たときの成分の足だったのかが一目瞭然という利点もあるし，添字として用いるギリシャ文字の数の節約にもなる．α, β, γ, μ, ν, で終わればよいが，それ以上必要なときには δ, ρ, σ などまで駆り出すことになりかねない．これらはすでにある種の物理量に対応させることが多く，無色透明であるべき添字として用いるのは極力避けたいところである．ただしこの場合でも，(滅多に起こることはないだろうが) 具体的に添字に数字を代入するときには $\mu' = 0'$, $1'$, $2'$, $3'$ ではなく，$(t, x) \longrightarrow (t', x')$ を $(x^0, x^1) \longrightarrow (x'^0, x'^1)$ と書くほうがよいかもしれない．まあそこまでこだわるべき話題でもないだろうから，このあたりでやめておく．

(2.2) 式から明らかなように，基底変換 (= 座標変換) をしても物理量 $\boldsymbol{A}$ は不変であることの帰結として，その成分が A^μ から $A^{\mu'}$ に変化するのである．物理量が $\boldsymbol{A}$ から $\boldsymbol{A}'$ に変化するわけではない．

すでに繰り返し強調しているように (相対論でいうところの) 物理量は，時空の各点で局所的に定義されなくてはならないから，点 P から別の点 P′ までの距離のような非局所的な量は原則として考えない[8)]．そのかわり頻繁に登場するのは，P で局所的に定義される無限小変位 $\boldsymbol{dx}$ である．(2.2) 式を $\boldsymbol{dx}$ に適用すると

$$\boldsymbol{dx} = dx^\mu\, \boldsymbol{e}_\mu = dx^{\mu'}\, \boldsymbol{e}_{\mu'}. \tag{2.3}$$

この式から

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_\mu \tag{2.4}$$

という重要な関係式が得られる．つまり $\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$ は，基底を $\boldsymbol{e}_\mu$ から $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ へ移す変換 (行列) となっている．

$\boldsymbol{e}_\mu$(P) と $\boldsymbol{e}_{\mu'}$(P) とはいずれも同じ点 P における基底であるから，互いに独立ではありえない．それらの間の線形関係を示すのが (2.4) 式である．さらに，基底を偏微分演算子：

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.5}$$

と選べば (2.4) 式を満たすことが容易にわかる．もちろん基底という抽象的な概念の具体的な表現は無数にあるのだが，この (2.5) 式を念頭においておくとイメージが浮かびやすいことがある．

(2.3) 式によれば，まず $\boldsymbol{e}_\mu$ と $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ を決めた後，対応する成分 dx^μ と $dx^{\mu'}$ が導かれるわけなので，(2.4) 式は「基底変換」からの単なる帰結に過ぎず新しい条件ではない．しかし，相対論では通常 $\boldsymbol{e}_\mu$ という概念をあらわには登場させないことが普通なので，具体的な計算は $\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$ を出発点として行われる．そのため，この $\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$ を「座標変換 (行列)」と呼び慣わすことが多い．ただ，この用語からは，大局的な時空を記述する 2 つの座標系 x^μ ($\mu = 0 \sim 3$) と $x^{\mu'}$ ($\mu' = 0 \sim 3$) を定義し，それらを微分して $\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$ を求める，というイメージが浮かんでしまうのではないだろうか．

しかしより正確には，点 P で局所的に定義された 2 つの基底の組 $\boldsymbol{e}_\mu$(P) と $\boldsymbol{e}_{\mu'}$(P)

[8)] とすれば，ある有限の空間体積で積分して得られる全質量や全エネルギーなどが定義できなくなってしまう，と心配になるかもしれない．じつはその通りで，相対論でそのような積分量を取り扱うためには，定義のあいまいさを取り除くための付加的な条件を課す必要がある．

のもとでの，点 P における無限小変位に対する異なる座標成分表示 $dx^\mu(\mathrm{P})$, $dx^{\mu'}(\mathrm{P})$ を用いて $\partial x^\mu(\mathrm{P})/\partial x^{\mu'}(\mathrm{P})$ を計算する，という方が適切であろう．この説明を読んで，上のイメージそのままではないかと思ったならば，(2.4) 式の $\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$ を正しく理解していたということなので気にせず先に進めばよい．仮にそうでなければ，この説明を繰り返し読んで理解に努めていただきたい．

さて，(2.4) 式を (2.2) 式に代入すれば

$$\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu = A^{\mu'} \boldsymbol{e}_{\mu'} = A^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_\mu$$

$$\Downarrow$$

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu, \quad A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} A^{\mu'} \tag{2.6}$$

となり，異なる基底に対するベクトルの成分が座標変換行列で関係づけられる．物理量 ($\boldsymbol{A}$) は座標系には依存しない概念なので，座標変換に対して「不変」である．(2.4) 式と (2.6) 式を比べるとその前の変換行列は互いに逆行列となっていることに注意してほしい．これは，異なる基底 ($\boldsymbol{e}_\mu$) 間の変換に際して，物理量の不変性を保証するために「成分の値」(A^μ) を適宜変化 ($\partial x^{\mu'}/\partial x^\mu$) させることで基底変換 ($\partial x^\mu/\partial x^{\mu'}$) の影響を相殺しているだけである．

2.1.3　ベクトルの微分

物理法則は微分方程式で記述されるので[9]，物理量の振舞いを理解するにはベクトルに対する微分を定義する必要がある．そこで，時空上の点 P において基底 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}(\mathrm{P})$ ($\mu = 0 \sim 3$) を選んだとき，ベクトル $\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ を基底の α 方向に沿って微分したものを

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}}} \boldsymbol{A} \equiv \nabla_\alpha \boldsymbol{A} = \nabla_\alpha (A^\mu \boldsymbol{e}_\mu) = (\nabla_\alpha A^\mu) \boldsymbol{e}_\mu + A^\mu (\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\mu) \tag{2.7}$$

と書くことにする．最後の等式は，微分に対してライプニッツ則が成り立つことを要請しただけのことである．

ベクトルの成分は単なる関数とみなしてよいから，それに ∇_α を作用させた結果は点 P における α 方向の偏微分：

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \equiv A^\mu{}_{,\alpha} \equiv \partial_\alpha A^\mu \tag{2.8}$$

に一致するものとする．後半の 2 つは偏微分の慣用的な表記法であり，本書でも頻繁に

---

9) というか，我々は今のところ微分方程式という言語を用いる以外には，自然法則を適切に記述し理解する他の有効な手段を持ち合わせていないので，というべきだろうか．

用いられる．

一方，基底を微分した結果が具体的にどのように書けるかは自明ではない．しかしながら，$\nabla_\alpha \boldsymbol{A}$ が，点 P において局所的に定義されたベクトルのように振る舞うならば[10]，それは基底 $\boldsymbol{e}_\nu(\mathrm{P})$ の線形結合で展開できるはずだ．そこで，(2.8) 式の結果と合わせれば $\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\mu$ もまた，$\boldsymbol{e}_\nu(\mathrm{P})$ の線形結合でなければならない．つまり

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\mu = \boldsymbol{e}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha} \tag{2.9}$$

の形で展開できるはずだ．この展開係数 $\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}$ を接続係数と呼ぶ．接続という言葉は，基底の微分を通じて，ある点で定義された基底をそこから無限小だけ離れた隣の点で定義された基底に結び付ける (= 接続する) という意味を持つ[11]．

まとめれば，点 P で定義されたベクトルの「基底の α 成分方向に沿った微分」は

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \boldsymbol{A} = (\nabla_\alpha A^\mu)\boldsymbol{e}_\mu + A^\mu(\nabla_\alpha \boldsymbol{e}_\mu) &= A^\mu{}_{,\alpha}\boldsymbol{e}_\mu + A^\mu \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\nu \\ &= (A^\mu{}_{,\alpha} + A^\nu \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha})\boldsymbol{e}_\mu \end{aligned} \tag{2.10}$$

となる[12]．そこで (2.10) 式の成分だけを取り出して,「ベクトル (= A^μ) を微分した結果は，普通の偏微分ではなく，以下で定義される共変微分：

$$A^\mu{}_{;\alpha} \equiv A^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} A^\nu \tag{2.11}$$

となる」，と天下り的に表現されることが多い．

(2.11) 式の表記は，終始一貫して基底という考え方を表に出すことがないという意味において経済的ではあるが，その背後の意味が意図的に隠蔽されているような感が否めない．後で考える一般のテンソルの共変微分を考えるときはなおさらである．本当は (2.7) 式のように，ベクトルを微分するときには成分だけを微分してはダメで基底を微分した項も忘れずにつけておく，というまったく当り前のことに過ぎないのだ．にもかかわらず,「ベクトル = 成分」という基底を省略した表記しか与えられていないとすれ

---

[10] より正確には，$\nabla_\alpha \boldsymbol{A}$ はベクトルではなく後述の 2 階テンソルの添字のうちの 1 つを α に固定したものなのだが，α を固定してもう 1 つの添字についてのみ注目するという立場でこのように表現しておく．後述の (2.45) 式参照.

[11] $\Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}$ の添字は，微分に対応する添字 (今の場合 α) が最後になるように順序を決めるのが普通である.

[12] 最後の等式は，ν に関する和を μ に関する和に置き換えただけである．このように上下に繰り返す添字は和をとるという規則のもとでは，それを ν と書いても μ と書いても結果は同じである．そのような添字をダミー (添字) と呼ぶ．実際に計算をすることですぐに慣れることではあるが，ダミー添字を上手く書き直すことは相対論の計算を手際よく行う上で大切である.

ば，基底の微分に対応する $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}A^{\nu}$ の項など思いつきようがない．

共変微分は本来きわめて自然な概念なのだが，成分表示をする際には基底の微分からくるおつりの項をすべて成分の微分の箇所に押しつけることになるため，見掛け上人為的に見えてしまうだけなのだ．

2.1.4　接続係数の変換則

接続係数の定義である (2.9) 式と基底の変換則 (2.4) 式：

$$\nabla_{\alpha}\,\boldsymbol{e}_{\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_{\nu}, \quad \boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_{\mu} \tag{2.12}$$

を用いれば，対応する接続係数の変換則を導くことができる．まず微分の線形性：

$$\nabla_{\boldsymbol{e}_{\beta'}} = \nabla_{(\partial x^{\beta}/\partial x^{\beta'})\boldsymbol{e}_{\beta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\nabla_{\boldsymbol{e}_{\beta}} \tag{2.13}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta'}\boldsymbol{e}_{\alpha'} &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\beta'}}\nabla_{\lambda}\left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{e}_{\gamma}\right)\\ &= \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}}\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\lambda}\boldsymbol{e}_{\mu} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{e}_{\gamma}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

さらにダミー添字を整理してまとめれば

$$\begin{aligned}\nabla_{\beta'}\boldsymbol{e}_{\alpha'} &= \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\alpha'}}\Gamma^{\gamma}{}_{\rho\lambda} + \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\right)\boldsymbol{e}_{\gamma}\\ &= \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\alpha'}}\Gamma^{\gamma}{}_{\rho\lambda} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\alpha'}}\right)\boldsymbol{e}_{\mu'}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

定義よりこの右辺は $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'}\boldsymbol{e}_{\mu'}$ であるから，それらを等値すれば接続係数の変換則：

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}} \tag{2.16}$$

が得られる．最後におつりの項があることからもわかるように，これは線形変換ではない[13]．このことから，接続係数はテンソルの成分とはなっていないことがわかる (2.3 節)．

---

[13] ところで，これぐらい添字の数が増えてくると未使用のギリシャ文字を見つけるのも一苦労となる．その意味でも μ と μ' を区別して

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}$$

のように書くほうが経済的であることに同意してもらえるのではなかろうか．

2.2 物理量の表現：双対ベクトル

2.2.1 双対空間

あるベクトル空間 $\mathscr{V}$ に対して，それに属するベクトルを数に対応させるような線形写像の集合をもとのベクトル空間の双対 (ベクトル) 空間 $\mathscr{V}^*$ と呼ぶ．このとき，ベクトル空間の基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ $(\mu = 0 \sim 3)$ に対して

$$\boldsymbol{e}^\nu(\boldsymbol{e}_\mu) \equiv (\boldsymbol{e}^\nu, \boldsymbol{e}_\mu) = \delta^\nu_\mu = \begin{cases} 1 & (\nu = \mu), \\ 0 & (\nu \neq \mu) \end{cases} \tag{2.17}$$

となるような線型写像の組 $\boldsymbol{e}^\nu$ $(\nu = 0 \sim 3)$ がただ 1 つ存在する[14]．このとき，双対空間の元である任意の線型写像 $\boldsymbol{A}^*$ は

$$\boldsymbol{A}^* = A_\nu \boldsymbol{e}^\nu \tag{2.18}$$

と展開できる．つまり，$\boldsymbol{e}^\nu$ はこの双対空間の基底となっている．これをもとのベクトル空間の基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ に対する双対基底と呼ぶ．この双対ベクトル空間 $\mathscr{V}^*$ の双対空間はもとのベクトル空間 $\mathscr{V}$ そのもの，すなわち $(\mathscr{V}^*)^* = \mathscr{V}$, である．双対の双対は自分自身というわけだ．

ベクトルの基底と言われればわかったような気がしても，線型写像とか双対基底といわれてくると抽象的すぎてピンとこないのは当然である．しかし，ベクトル $\boldsymbol{A}$ で表現される物理量 $\mathscr{A}$ は，対応する双対空間における双対ベクトル $\boldsymbol{A}^*$ によっても表現できる，というように理解しておけば事足りる．具体的には，以下の簡単な例が直感的な理解の助けとなろう．

一般の 4 行 1 列の縦ベクトルに対して，基底 $\boldsymbol{e}_\mu$ を $(\mu + 1)$ 行の成分だけが 1 でそれ以外は 0 の単位ベクトルに選ぶ．このとき，ある物理量 $\mathscr{A}$ に対応するベクトルは

$$\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$$

---

[14] たとえば，斎藤毅著『線形代数の世界』(東京大学出版会，2007) 参照．また，ここで用いた $\boldsymbol{e}^\nu$ のことを『入門』では $\boldsymbol{w}^\nu$ と記してある．ところで，クロネッカー記号 δ^μ_ν は，添字の上下は区別するが，左右は区別しないことが多い．つまり，表記としては $\delta^\mu{}_\nu = \delta_\nu{}^\mu = \delta^\mu_\nu$ のように用いられる (後述の脚注 22 (p.33) 参照)．

$$= A^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

と展開できる．この表現をとると，双対ベクトルは 1 行 4 列の横ベクトル，双対基底 $\boldsymbol{e}^\mu$ は $(\mu+1)$ 行の成分だけが 1 でそれ以外は 0 の単位ベクトルに対応する．つまり双対ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^* &= A_\nu \boldsymbol{e}^\nu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \\ &= A_0(1,0,0,0) + A_1(0,1,0,0) + A_2(0,0,1,0) + A_3(0,0,0,1) \end{aligned} \tag{2.20}$$

と展開できる．ただし，この行列表示はベクトル空間の (無限に存在する) 表現法のあくまで一例でしかないことも注意しておこう．

少し混乱したかも知れないので，以上をまとめておこう．ある物理量を $\mathscr{A}(\mathrm{P})$ とする．この記法はあくまで概念的な意味でしかない．$\mathscr{A}(\mathrm{P})$ を数多くあるベクトル空間の 1 つを選んで表現したものを，$\boldsymbol{A}(\mathrm{P})$ と書く．このベクトル空間には必ずある双対ベクトル空間が対応するので，その双対ベクトル空間の基底を用いて同じ物理量 $\mathscr{A}(\mathrm{P})$ を表現したものを $\boldsymbol{A}^*(\mathrm{P})$ と書く．したがって $\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) \neq \boldsymbol{A}^*(\mathrm{P})$ であるし，それらの成分も $A^\mu(\mathrm{P}) \neq A_\mu(\mathrm{P})$ であるが，同じ物理量 $\mathscr{A}$ に対応していることには間違いない．このことからもわかるように，添字の上下の位置には重要な意味がある．したがってそれらを正しく区別して用いることが必要である．しかしながら，ベクトルで表現される物理量と双対ベクトルで表現される物理量という 2 種類の分類があるわけではない．そのような物理量はいずれもベクトルと呼ばれ，異なる 2 つの表現法があるというだけの話である[15)]．

2.2.2　内積と計量

ベクトル空間およびその双対空間の基底である $\boldsymbol{e}_\nu$ および $\boldsymbol{e}^\mu$ の組の具体的な表現としては，いかなる抽象的な概念を念頭におこうとまったく自由である．しかし実際に観測できる量は，そのような表現の選択には依らないものでなくては困る．我々が計算し比較できるのはあくまで数値 (関数も含む) に限るので，これら同士を組み合わせて数に対応させる規則，すなわち内積，を定義する必要がある．

---

15) $\boldsymbol{A}^*$ と $\boldsymbol{A}$ の関係は，量子力学におけるブラ表示とケット表示の関係のようなものである．たとえば,『解析力学・量子論』第 12 章および後述の 2.2.4 節参照.

ベクトルで表現される 2 つの物理量 $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ から数を対応させる演算を括弧で表現することにすれば，具体的には $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^*)$, $(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*)$ が考えられる．そこで，これらの異なる表現の内積がいずれも同じ値となることを要請する[16]．これらを具体的に計算すると

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}) = A_\nu B^\mu(\boldsymbol{e}^\nu,\boldsymbol{e}_\mu),\\(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*) = A_\nu B_\mu(\boldsymbol{e}^\nu,\boldsymbol{e}^\mu),\\(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^*) = A^\nu B_\mu(\boldsymbol{e}_\nu,\boldsymbol{e}^\mu),\\(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = A^\nu B^\mu(\boldsymbol{e}_\nu,\boldsymbol{e}_\mu)\end{cases} \tag{2.21}$$

となる．まず，(2.17) 式より

$$(\boldsymbol{e}^\nu,\boldsymbol{e}_\mu) = (\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}^\nu) = \delta^\nu_\mu \tag{2.22}$$

である．そもそもこれは基底ベクトルと双対基底ベクトルを結ぶ定義式であった．さらに，基底ベクトル同士，および双対基底ベクトル同士の内積によって相対論の主役とも言える計量テンソル，$g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ を定義する．すなわち，

$$(\boldsymbol{e}_\nu,\boldsymbol{e}_\mu) = (\boldsymbol{e}_\mu,\boldsymbol{e}_\nu) = g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}, \tag{2.23}$$

$$(\boldsymbol{e}^\nu,\boldsymbol{e}^\mu) = (\boldsymbol{e}^\mu,\boldsymbol{e}^\nu) = g^{\nu\mu} = g^{\mu\nu}. \tag{2.24}$$

(2.21) 式に (2.22) 式，(2.24) 式を代入して計算し，それらすべてが一致する条件を求めると

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}) = A_\nu B^\mu(\boldsymbol{e}^\nu,\boldsymbol{e}_\mu) = A_\nu B^\mu \delta^\nu{}_\mu = A_\mu B^\mu,\\(\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*) = A_\nu B_\mu(\boldsymbol{e}^\nu,\boldsymbol{e}^\mu) = A_\nu B_\mu g^{\nu\mu},\\(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^*) = A^\nu B_\mu(\boldsymbol{e}_\nu,\boldsymbol{e}^\mu) = A^\nu B_\mu \delta_\nu{}^\mu = A^\nu B_\nu,\\(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = A^\nu B^\mu(\boldsymbol{e}_\nu,\boldsymbol{e}_\mu) = A^\nu B^\mu g_{\nu\mu}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}A_\nu g^{\nu\mu} = A^\mu,\\B^\mu g_{\mu\nu} = B_\nu\end{cases} \tag{2.25}$$

が得られる．このように，$g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ はベクトルの成分の添字の位置を上げ下げする働きがあることがわかる．添字の上げ下げを繰り返したとき再びもとに戻るためには

[16] 相対論では実係数ベクトル空間を考えるので，これらの順序は交換してもよい．たとえば $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$．ただし量子論では複素共役という操作が必要になる．

$$A^\mu g_{\mu\nu} = (A_\alpha g^{\alpha\mu}) g_{\mu\nu} = A_\alpha (g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu}) = A_\alpha \delta^\alpha_\nu = A_\nu$$

$$\Longrightarrow g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\nu, \tag{2.26}$$

すなわち，$g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ が互いに逆行列となっている必要がある．

(2.19) 式と (2.20) 式の行列表示を用いれば $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積は

$$(\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}) = (A_0, A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} B^0 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix} = A_\mu B^\mu$$

$$= B_\mu A^\mu = (B_0, B_1, B_2, B_3) \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{A}) \tag{2.27}$$

となるので，わかりやすいかもしれない．

本節では計量を (2.23) 式と (2.24) 式によって定義した．ところで，無限小距離を表すベクトルを

$$\boldsymbol{dx} = dx^\mu\, \boldsymbol{e}_\mu \tag{2.28}$$

とすれば，その内積は

$$ds^2 \equiv (\boldsymbol{dx}, \boldsymbol{dx}) = (dx^\mu \boldsymbol{e}_\mu, dx^\nu \boldsymbol{e}_\nu) = dx^\mu dx^\nu \underbrace{(\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)}_{= g_{\mu\nu}}$$

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.29}$$

となる．実際，時空の計量はむしろこの (2.29) 式によって定義されるとして扱う文献の方が多いかもしれないので注意しておく．

2.2.3　双対ベクトルの変換則と微分

内積を用いれば，双対ベクトルの基底と成分の座標変換則を導くことができる．具体的には，基底と双対基底の間の内積に (2.4) 式を代入すれば

$$\delta^{\mu'}_{\nu'} = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mu}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu}'}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mu}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu}})$$

$$\Longrightarrow (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mu}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu}}) = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \delta^{\mu'}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}. \tag{2.30}$$

この式と $(\boldsymbol{e}^\mu, \boldsymbol{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$ を組み合わせれば

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mu}'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \boldsymbol{e}^{\mu} \tag{2.31}$$

を得る．さらに,

$$A_{\mu}\boldsymbol{e}^{\mu} = A_{\mu'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mu}'} = A_{\mu'}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\boldsymbol{e}^{\mu}$$

$$\Longrightarrow A_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}A_{\mu},\ A_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}A_{\mu'} \tag{2.32}$$

も導ける．

以上をまとめると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_{\mu}, \quad A_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}A_{\mu}, \\ \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\mu}'} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\boldsymbol{e}^{\mu}, \quad A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}A^{\mu} \end{aligned} \tag{2.33}$$

となる．これらの変換則は，添字の上下，および「′ 系」と「′ なし系」で対になっていることに注意しさえすれば，無理に何かを暗記する必要すらないほど自然な形となっている．また，基底ベクトルである $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}$ の変換性を基準とすれば，A_{μ} はそれと同じだが A^{μ} はそれとは逆という意味で，A_{μ} を「共変ベクトル」，A^{μ} を「反変ベクトル」と呼ぶことが慣習となっている．しかしこれでは，あたかも物理量が座標変換に応じて変化するようなイメージを与えかねず，違和感を禁じ得ない[17)]．物理量 ($\mathscr{A}$) は座標系などには依存しない概念なので，座標変換に対して「不変」である．異なる基底 ($\boldsymbol{e}_{\mu}$) 間の変換に際して，物理量の不変性を保証するために「成分の値」(A^{μ}) を適宜変化 ($\partial x^{\mu'}/\partial x^{\mu}$) させることで基底変換 ($\partial x^{\mu}/\partial x^{\mu'}$) を相殺しているだけである．

次に双対ベクトルに対する微分の具体的な表式を求めてみよう．そのために，内積においても微分のライプニッツ則が成り立つことを要請する．つまり,

$$\nabla_{\alpha}(\boldsymbol{e}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\nu}) = (\nabla_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\nu}) + (\boldsymbol{e}^{\mu}, \nabla_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\nu}) \tag{2.34}$$

が成り立つものとする．上式の左辺は定義より $\nabla_{\alpha}\delta^{\mu}{}_{\nu} = 0$ なので,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\nu}) &= -(\boldsymbol{e}^{\mu}, \nabla_{\alpha}\boldsymbol{e}_{\nu}) = -(\boldsymbol{e}^{\mu}, \Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}}) = -\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}(\boldsymbol{e}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= -\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} = -\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha} \end{aligned} \tag{2.35}$$

となる．この式は $\nabla_{\alpha}\boldsymbol{e}^{\mu}$ と $\boldsymbol{e}_{\nu}$ との内積をとれば $-\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}$ となることを意味している

---

17) どうしてもということであれば,「ベクトルの共変成分」,「ベクトルの反変成分」とでも呼ぶべきであろう．

ので，双対基底の微分は

$$\nabla_\alpha \boldsymbol{e}^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}\boldsymbol{e}^\nu \tag{2.36}$$

であることがわかる．

これらを用いると，双対ベクトルの「基底の α 成分方向に沿った微分」は

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \boldsymbol{A}^* &= (\nabla_\alpha A_\mu)\boldsymbol{e}^\mu + A_\mu(\nabla_\alpha \boldsymbol{e}^\mu) = A_{\mu,\alpha}\boldsymbol{e}^\mu - A_\mu \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}\boldsymbol{e}^\nu \\ &= (A_{\mu,\alpha} - A_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha})\boldsymbol{e}^\mu \end{aligned}\tag{2.37}$$

となる．そこで (2.37) 式の成分だけを取り出せば,「双対ベクトル $= A_\mu$」の微分は

$$A_{\mu;\alpha} \equiv A_{\mu,\alpha} - \Gamma^\nu{}_{\mu\alpha}A_\nu \tag{2.38}$$

という言い方になる．

2.2.4 量子論における表現との対応

ところで，この異なる基底ベクトルの選び方の任意性，さらには物理量のベクトルと双対ベクトルによる 2 つの表現法が存在するという事実は，量子論においてもまったく同様である．

量子論では状態ベクトルをケット $|\psi\rangle$ で表現する．これは，座標に対応する基底ベクトル $|x\rangle$ を用いて

$$|\psi\rangle = \int dx\, |x\rangle\langle x|\psi\rangle \equiv \int dx\, |x\rangle \psi(x) \tag{2.39}$$

と展開できる[18]．この x は連続的なパラメータだが，相対論における時空の足 μ に対応する．$\langle x|\psi\rangle$ は $\langle x|$ と $|\psi\rangle$ の内積であり，座標表示による実空間の波動関数に対応する．これは $|\psi\rangle$ を $|x\rangle$ という基底ベクトルで展開したときの係数 (=「成分」) に他ならない．(2.39) 式を，相対論におけるベクトルの展開である (2.1) 式：

$$\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu \tag{2.40}$$

と比較すれば,

$$\boldsymbol{A} \Longleftrightarrow |\psi\rangle, \quad \boldsymbol{e}_\mu \Longleftrightarrow |x\rangle, \quad A^\mu \Longleftrightarrow \psi(x), \quad \sum_\mu \Longleftrightarrow \int dx \tag{2.41}$$

という対応関係が読み取れる．

状態ベクトルを座標とは異なる基底ベクトルによって展開することもできる．たとえば運動量に対応する基底ベクトルを用いれば

---

[18] 本節で記述している量子論の表現に関しては『解析力学・量子論』第 12 章を参照のこと．

$$|\psi\rangle = \int dp\,|p\rangle\langle p|\psi\rangle \equiv \int dp\,|p\rangle\widetilde{\psi}(p) \tag{2.42}$$

となる．これを (2.2) 式：

$$\boldsymbol{A} = A^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu} = A^{\mu'}\boldsymbol{e}_{\mu'} \tag{2.43}$$

と比べることで

$$\boldsymbol{e}_{\mu} \longrightarrow \boldsymbol{e}_{\mu'} \Longleftrightarrow |x\rangle \longrightarrow |p\rangle, \quad A^{\mu} \longrightarrow A^{\mu\prime} \Longleftrightarrow \psi(x) \longrightarrow \widetilde{\psi}(p) \tag{2.44}$$

という対応関係があることもわかる．

量子論ではケットの双対ベクトルをブラで表す．当然，状態ベクトルをケットではなくブラを用いて

$$\langle\psi| = \int dx\,\langle\psi|x\rangle\langle x| \equiv \int dx\,\psi^{*}(x)\langle x| \tag{2.45}$$

と表現することもできる[19)]．これは (2.18) 式：

$$\boldsymbol{A}^{*} = A_{\mu}\boldsymbol{e}^{\mu} \tag{2.46}$$

と比べるべきもので，

$$\boldsymbol{A}^{*} \Longleftrightarrow \langle\psi|, \quad \boldsymbol{e}^{\mu} \Longleftrightarrow \langle x|, \quad A_{\mu} \Longleftrightarrow \psi^{*}(x) \tag{2.47}$$

と解釈すればよい．つまり，相対論における成分の添字の上げ下げは，量子論では波動関数の複素共役をとる操作に対応している．

異なる基底に対応した成分は互いに，基底ベクトルの内積を用いて変換できる．今の場合，(2.39) 式と $\langle p|$ の内積をとれば

$$\langle p|\psi\rangle = \int dx\,\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle \Longrightarrow \widetilde{\psi}(p) = \int dx\,\langle p|x\rangle\psi(x) \tag{2.48}$$

となる．2 つめの式は座標表示と運動量表示の波動関数を結びつけるものであるからフーリエ変換にほかならず，1 次元系の場合は

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \psi(x)e^{-ipx/\hbar}\,dx \tag{2.49}$$

となる．すなわち

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar} \tag{2.50}$$

であるから，異なる基底ベクトルが

---

19) この式の $*$ は複素共役を表す．一方，$\boldsymbol{A}^{*}$ の $*$ は複素共役ではなく，$\boldsymbol{A}$ の双対ベクトルであることを示すために用いた単なる記号である．

	相対論	量子論
基底ベクトル	$\boldsymbol{e}_\mu,\ \boldsymbol{e}_{\mu'}$	$\lvert x\rangle,\ \lvert p\rangle$
双対基底	$\boldsymbol{e}^\mu,\ \boldsymbol{e}^{\mu'}$	$\langle x\rvert,\ \langle p\rvert$
基底の変換則	$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_\mu$	$\lvert p\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\displaystyle\int dx\, e^{+ipx/\hbar}\lvert x\rangle$
双対基底の変換則	$\boldsymbol{e}^{\mu'} = \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\boldsymbol{e}^\mu$	$\langle p\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\displaystyle\int dx\, e^{-ipx/\hbar}\langle x\rvert$
ベクトルの成分	$A^\mu,\ A^{\mu'}$	$\psi(x),\ \widetilde{\psi}(p)$
双対ベクトルの成分	$A_\mu,\ A_{\mu'}$	$\psi^*(x),\ \widetilde{\psi}^*(p)$
ベクトルの成分の変換則	$A^{\mu'} = \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}A^\mu$	$\widetilde{\psi}(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\displaystyle\int dx\, e^{-ipx/\hbar}\psi(x)$
双対ベクトルの成分の変換則	$A_{\mu'} = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}A_\mu$	$\widetilde{\psi}^*(p) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\displaystyle\int dx\, e^{+ipx/\hbar}\psi^*(x)$

表 2.1　相対論と量子論における物理量の表現の対比.

$$\lvert x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, e^{-ixp/\hbar}\lvert p\rangle, \quad \lvert p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\, e^{+ipx/\hbar}\lvert x\rangle \tag{2.51}$$

という変換則で結びつけられることを示している．これは相対論における基底ベクトルの変換則：

$$\boldsymbol{e}_\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}\boldsymbol{e}_{\mu'}, \quad \boldsymbol{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\boldsymbol{e}_\mu \tag{2.52}$$

に対応している．これ以外にもさらにいろいろな対応関係が考えられるが，とりあえずここで述べた結果を表 2.1 にまとめることで，相対論と量子論の表現の間の対応の議論を終えることにする．

2.3　物理量の表現：テンソル

2.3.1　テンソル積と 2 階テンソル

ここまでは，(2.1) 式あるいは (2.18) 式のように展開できる物理量を「ベクトル」と呼んだ．このような物理量は，時空の各点において A^μ あるいは A_μ に対応する 4 つの自由度を持つ．しかし，物理量は別にベクトルだけに限られるわけではない．そこで

さらに広い概念であるテンソルを導入する必要がある．もっとも簡単な例は 2 つの独立なベクトルを掛け合わせたもので，

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = A^\mu B^\nu \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu, & \boldsymbol{A^*}\otimes\boldsymbol{B^*} = A_\mu B_\nu \boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu, \\ \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B^*} = A^\mu B_\nu \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu, & \boldsymbol{A^*}\otimes\boldsymbol{B} = A_\mu B^\nu \boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu \end{cases} \tag{2.53}$$

の 4 種類が考えられる．ここで，$\otimes$ はテンソル同士の積という概念 (テンソル積) を表現する記号である．テンソル積は可換ではないので，$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu \neq \boldsymbol{e}^\nu \otimes \boldsymbol{e}^\mu$ 等であることに注意してほしい．

テンソル積と聞くと難しそうであるが，再び (2.19) 式と (2.20) 式の行列表示を用いれば $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B^*}$ のテンソル積は具体的に

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B^*} &= \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} (B_0, B_1, B_2, B_3) \\ &= \begin{pmatrix} A^0B_0 & A^0B_1 & A^0B_2 & A^0B_3 \\ A^1B_0 & A^1B_1 & A^1B_2 & A^1B_3 \\ A^2B_0 & A^2B_1 & A^2B_2 & A^2B_3 \\ A^3B_0 & A^3B_1 & A^3B_2 & A^3B_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.54}$$

と書ける．このように表示すれば，直感的なイメージがつかみやすいであろう．たとえば，2 行 3 列の部分だけに着目すれば $\boldsymbol{e_1}\otimes\boldsymbol{e^2}$ という (テンソル) 基底に A^1B_2 という値 (成分) が掛け合わされている，すなわち

$$A^1B_2\ (\boldsymbol{e_1}\otimes\boldsymbol{e^2}) = A^1B_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

という構造である．

つまり，$\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu$ は $(\mu+1)$ 行 $(\nu+1)$ 列の成分だけが 1 で残りは 0 の 4 行 4 列の行列に対応する．この見方によれば，$A^\mu B_\nu$ 自身は行列ではなく，あくまで $\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu$ の行列の前の係数 (=成分の値) でしかない．(2.19) 式と (2.20) 式の行列表示を採用した場合，(2.53) 式の 4 種類のテンソル積の中で 4 行 4 列の行列で具体的に表現できるのはこれだけであるが，他の場合にもこれを一般化すればよいことは理解してもらえると思う[20]．

---

[20] 強いて言えば，$\boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu$ は 4 列 4 列の「列列」，$\boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu$ は 4 列 4 行の「列行」，$\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu$ は

この例のように，基底ベクトルあるいは双対基底ベクトルを 2 個掛け合わせた基底テンソルによって，展開できる物理量 $\boldsymbol{T}$ を 2 階のテンソルとよぶ．その成分は独立な 16 の自由度をもつから，一般には 2 つのベクトルの積 (8 自由度しかない) では書き表せない．また，2 階のテンソルには次の 4 種類の展開 (あるいは表現)：

$$T^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu, \quad T_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu, \quad T^\mu{}_\nu \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu, \quad T_\mu{}^\nu \boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu \tag{2.56}$$

が存在するが，今までの議論からわかるように，いずれも同じ物理量を異なる成分の組で表しているに過ぎない．このことから，(2.33) 式を用いればテンソルの成分の座標変換則がただちに導かれる．たとえば，

$$T^\mu{}_\nu \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu = T^{\mu'}{}_{\nu'} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu'}} \otimes \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\nu'}} = T^{\mu'}{}_{\nu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \boldsymbol{e}_\mu \otimes \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \boldsymbol{e}^\nu$$

$$\Longrightarrow T^{\mu'}{}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} T^\mu{}_\nu \tag{2.57}$$

である．添字の位置の上下にさえ気をつければ，いまやほとんど自明の結果であろう．

特に，2 階のテンソルで表現される物理量の中でもっとも重要なものが時空の計量 $\boldsymbol{g}$ であり，それをテンソル積で展開した結果が

$$g^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu, \quad g_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu, \quad \underbrace{g^\mu{}_\nu}_{=\delta^\mu_\nu} \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\nu, \quad \underbrace{g_\mu{}^\nu}_{=\delta^\nu_\mu} \boldsymbol{e}^\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu \tag{2.58}$$

なのである．ところでじつはすでに説明したベクトル $\boldsymbol{A} = A^\mu \boldsymbol{e}_\mu$ の微分は 2 階のテンソルとなっている．直感的な説明のためにあえて，基底の α 方向に沿った微分というもってまわった言い方をしてきたが，それでは本来の相対論的不変性を無視してしまっている．より正確には

$$\boldsymbol{\nabla A} \equiv A^\mu{}_{;\alpha} \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\alpha \tag{2.59}$$

とでも書くべきものであり，その成分 $A^\mu{}_{;\alpha}$ はその添字の位置が示す通りの 2 階テンソルとなっている．このことはクリストッフェル記号の変換則 (2.16) 式を用いて，具体的に $A^\mu{}_{;\alpha}$ の変換則を計算することからも確かめることができる．

$$\begin{aligned} A^{\alpha'}{}_{;\beta'} &\equiv A^{\alpha'}{}_{,\beta'} + \Gamma^{\alpha'}{}_{\gamma'\beta'} A^{\gamma'} \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} A^\mu \right) \end{aligned}$$

4 行 4 行の「行行」，とでも呼ぶべき量に対応していると考えられる．

$$+\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\lambda}}A^{\lambda}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}+\frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\beta'}}\right)$$

$$=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}\left(A^{\mu}{}_{,\nu}+\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}A^{\rho}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}+\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\gamma'}\partial x^{\beta'}}\right)A^{\mu}. \tag{2.60}$$

ここで右辺第 2 項の括弧の中は

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta^{\alpha'}{}_{\beta'}=0 \tag{2.61}$$

なので，確かに (2.57) 式の 2 階テンソルと同じ変換則であることがわかる．

2.3.2 テンソル成分の添字の上げ下げ

2 階テンソルには (2.56) 式のように 4 つの異なる表示があるが，それらの成分 $T^{\mu\nu}, T_{\mu\nu}, T^{\mu}{}_{\nu}, T_{\mu}{}^{\nu}$ は本質的には同じものである[21]．そこで，それらの間の関係式を知る必要がある．2 階テンソルの例としてとりあげたベクトル同士のテンソル積の成分は $A^{\mu}B^{\nu}$, $A_{\mu}B_{\nu}$, $A^{\mu}B_{\nu}$, $A_{\mu}B^{\nu}$ のように書ける．すでにベクトルの成分の添字は (2.25) 式：

$$g^{\mu\nu}A_{\mu}=A^{\nu}, \quad g_{\mu\nu}A^{\mu}=A_{\nu} \tag{2.62}$$

のように上げ下げの規則が与えられているので，2 階テンソルの成分の添字についてもそれぞれこの規則を用いればよいことが推測できる．すなわち，

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}T_{\beta\gamma}&=T^{\alpha}{}_{\gamma}, \quad g^{\alpha\beta}T_{\beta}{}^{\gamma}=T^{\alpha\gamma}, \\ g_{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}&=T_{\alpha}{}^{\gamma}, \quad g_{\alpha\beta}T^{\beta}{}_{\gamma}=T_{\alpha\gamma} \end{aligned} \tag{2.63}$$

である．ただし計量テンソルの成分は対称 ($g^{\alpha\beta}=g^{\beta\alpha}$, $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$) であるから，$g^{\alpha\beta}T_{\beta\gamma}=g^{\beta\alpha}T_{\beta\gamma}=T^{\alpha}{}_{\gamma}$ は正しいのだが，

$$T_{\alpha}{}^{\gamma}=g_{\alpha\beta}T^{\beta\gamma}\neq g_{\alpha\beta}T^{\gamma\beta}=T^{\gamma}{}_{\alpha} \tag{2.64}$$

となることを注意しておく[22]．

この計量テンソルを用いた添字の上げ下げの規則を計量テンソル自身に適用すれば

---

[21] 値が一致するというわけではなく，同じ物理量に対応しているからにはそれらが全体として持つ情報は同じという意味である．

[22] このことから逆に，$T^{\mu\nu}$ が対称テンソル $(=T^{\nu\mu})$ の場合には $T_{\alpha}{}^{\beta}=T^{\beta}{}_{\alpha}$ が成り立つことがわかる．したがって対称テンソルに対しては添字の左右は気にせず $T_{\alpha}{}^{\beta}=T_{\alpha}^{\beta}$ という記法が用いられる

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = g^{\alpha}{}_{\gamma}, \quad g^{\alpha\beta}g_{\beta}{}^{\gamma} = g^{\alpha\gamma},$$
$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = g_{\alpha}{}^{\gamma}, \quad g_{\alpha\beta}g^{\beta}{}_{\gamma} = g_{\alpha\gamma} \tag{2.65}$$

となるので，この 4 つの式の整合性から計量テンソルの成分が満たすべき条件：

$$g^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad g_{\alpha}{}^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \quad g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}, \quad g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha} \tag{2.66}$$

も確認できる．

2.3.3　接続係数とクリストッフェル記号

さて，(2.9) 式を「接続係数」の定義とすると述べたが，じつは相対論では，具体的な形としてクリストッフェル記号：

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\Gamma_{\mu\beta\gamma} = g^{\alpha\mu}\,\frac{1}{2}\,(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \tag{2.67}$$

を選ぶことになっている．これは右端の 2 つの添字について対称である[23]．

そもそも接続係数とは基底の微分を通じて，ある点で定義された基底をそこから無限小だけ離れた隣の点で定義された基底に結び付ける (= 接続する) という意味である．その意味では，接続係数は必ずしも (2.67) 式で定義されるクリストッフェル記号に限るものではない．しかし 2.4 節で示すように，「(ユークリッド空間における直線を拡張して) 局所的に定義された測地線が固有時を極大にする世界線と一致する」ことを要請すれば，(2.9) 式で定義された接続係数が時空の計量だけから (2.67) 式で書けるクリストッフェル記号と等しくなる．一般相対論で接続係数をクリストッフェル記号に選ぶ理由はこのような物理的要請に基づいている[24]．

テンソル積の部分にライプニッツ則を用いれば，任意の階数のテンソルの微分を自然に計算することができる．必要なのは (2.9) 式と (2.36) 式に示されている基底ベクトルと双対基底ベクトルの微分

$$\nabla_{\alpha}\,\boldsymbol{e}_{\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_{\nu}, \quad \nabla_{\alpha}\,\boldsymbol{e}^{\mu} = -\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha}\boldsymbol{e}^{\nu} \tag{2.68}$$

だけである．

こともある．特にクロネッカーデルタの場合，$\delta^{\mu}{}_{\nu}$ ではなく δ^{μ}_{ν} と書くことが多い．ただし，その場合でもあえて $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ あるいは $\delta_{\nu}{}^{\mu}$ のように左右を区別しておいたほうが，見た目がきれいだし計算をチェックする際に便利なこともある．本書で場所によってこれらの記法が混在している理由もそこにあると大目に見ていただきたい．

[23] 2 つの添字を入れ換えても値が変わらないことをさして，添字について対称であるという．

[24] より詳しくは『入門』の 2.6 節，3.1 節，問題 [2.3], [2.4], [2.5] を参照．

例として，(2.56) 式の 2 階テンソルの微分を計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\alpha(T^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{e}_\nu)\\
&=(\nabla_\alpha T^{\mu\nu})\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{e}_\nu+T^{\mu\nu}(\nabla_\alpha\boldsymbol{e}_\mu)\otimes\boldsymbol{e}_\nu+T^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu\otimes(\nabla_\alpha\boldsymbol{e}_\nu)\\
&=T^{\mu\nu}{}_{,\alpha}\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{e}_\nu+T^{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}\boldsymbol{e}_\beta\otimes\boldsymbol{e}_\nu+T^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_\mu\otimes\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}\boldsymbol{e}_\beta\\
&=(T^{\mu\nu}{}_{,\alpha}+T^{\beta\nu}\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}+T^{\mu\beta}\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha})\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{e}_\nu\\
&\equiv T^{\mu\nu}{}_{;\alpha}\boldsymbol{e}_\mu\otimes\boldsymbol{e}_\nu. \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
&\nabla_\alpha(T_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^\mu\otimes\boldsymbol{e}^\nu)\\
&=(\nabla_\alpha T_{\mu\nu})\boldsymbol{e}^\mu\otimes\boldsymbol{e}^\nu+T_{\mu\nu}(\nabla_\alpha\boldsymbol{e}^\mu)\otimes\boldsymbol{e}^\nu+T_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^\mu\otimes(\nabla_\alpha\boldsymbol{e}^\nu)\\
&=T_{\mu\nu,\alpha}\boldsymbol{e}^\mu\otimes\boldsymbol{e}^\nu-T_{\mu\nu}\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}\boldsymbol{e}^\beta\otimes\boldsymbol{e}^\nu-T_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^\mu\otimes\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}\boldsymbol{e}^\beta\\
&=(T_{\mu\nu,\alpha}-T_{\beta\nu}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}-T_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha})\boldsymbol{e}^\mu\otimes\boldsymbol{e}^\nu\\
&\equiv T_{\mu\nu;\alpha}\boldsymbol{e}^\mu\otimes\boldsymbol{e}^\nu \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

となる．

ベクトルの場合にも述べたように，通常は，基底の微分をすべて成分に押しつけて $T^{\mu\nu}{}_{;\alpha}$ という記法で「共変微分」を定義することが多い．つまり，

$$T^{\mu\nu}{}_{;\alpha}=T^{\mu\nu}{}_{,\alpha}+T^{\beta\nu}\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}+T^{\mu\beta}\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}, \qquad (2.71)$$

$$T_{\mu\nu;\alpha}=T_{\mu\nu,\alpha}-T_{\beta\nu}\Gamma^\beta{}_{\mu\alpha}-T_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} \qquad (2.72)$$

というわけだ[25)]．ここで示したように (2.68) 式さえ頭にいれておけば，テンソルの微分もまったく自然に導けることがわかる．したがって，本書では微分とは共変微分 ∇_μ $(= {}_{;\mu})$ のことをさすものとし，通常の微分 ∂_μ $(= {}_{,\mu})$ の方を偏微分と呼んで使い分けることにする．

特に重要な例として，計量の微分を計算してみよう．

$$g_{\alpha\beta;\gamma}=g_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma}g_{\mu\beta}-\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}g_{\alpha\mu}=g_{\alpha\beta,\gamma}-\Gamma_{\beta\alpha\gamma}-\Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \qquad (2.73)$$

ここで計量の微分が 0 となることを要請すれば，

$$g_{\alpha\beta,\gamma}=\Gamma_{\beta\alpha\gamma}+\Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \qquad (2.74)$$

---

25) 左辺の微分する添字 α は，右辺では Γ の右下の添字となる．また，左辺の上添字に関する微分に対しては $+\Gamma$，下添字に関しては $-\Gamma$ の項が付け加わる．

添字を入れ換えたものも書いておけば

$$g_{\alpha\gamma,\beta} = \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}, \quad g_{\beta\gamma,\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha}. \tag{2.75}$$

したがって，

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\alpha} \\ &= \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta} - \Gamma_{\gamma\beta\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha} \\ &= 2\Gamma_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

ここで最後の等式は，接続係数の右下 2 つの添字が入れ換えに対して対称であることを要請した結果である[26]．このように，計量の微分が 0 となることと下添字の対称性を要請すると，接続係数は (2.67) 式のクリストッフェル記号と一致する．

$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ であることを用いれば

$$\underbrace{(g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta})_{;\gamma}}_{\delta_\alpha{}^\beta{}_{;\gamma}=0} = \underbrace{g_{\alpha\mu;\gamma}}_{=0} g^{\mu\beta} + g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{;\gamma} \tag{2.77}$$

より

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{;\gamma} = 0 \\ & \Longrightarrow g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{;\gamma} = \delta^\nu{}_\mu g^{\mu\beta}{}_{;\gamma} = (\delta^\nu{}_\mu g^{\mu\beta})_{;\gamma} = g^{\nu\beta}{}_{;\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{2.78}$$

したがって，たとえば

$$T^\mu{}_{\nu;\alpha} = (g_{\beta\nu} T^{\mu\beta})_{;\alpha} = g_{\beta\nu;\alpha} T^{\mu\beta} + g_{\beta\nu}(T^{\mu\beta}{}_{;\alpha}) = g_{\beta\nu}(T^{\mu\beta}{}_{;\alpha}) \tag{2.79}$$

つまり，任意のテンソルの添字の上げ下げとそのテンソルの共変微分は可換である．その可換性を保証するためには，接続係数として (2.67) 式で定義されるクリストッフェル記号を採用しなければならない，と言うこともできる．

最後に，共変微分は非可換であることを注意しておく[27]．たとえば，任意のベクトルに対して

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\mu = A^\mu{}_{;\beta\alpha} - A^\mu{}_{;\alpha\beta} \equiv R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu \tag{2.80}$$

---

[26] これは，時空の任意の点のまわりで局所的に $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ のすべての成分の値を同時に 0 と置くことができるための必要十分条件である（『入門』の問題 [2.3]）．物理的には，任意の点において重力を感じないような局所慣性系を設定することができることに対応している．

[27] 厳密なことが好きな読者は，偏微分だって必ずしも可換ではないぞ，と思われるかもしれない．しかし数学は別として，通常の物理学には病的な物理量は登場しない．したがって，偏微分は常に可換であると主張してもほとんど問題はないのである．

と書くと，$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ は A^μ には依存しない 4 階のテンソルとなる．これはリーマンテンソルと呼ばれ，時空の幾何学を特徴づける重要な物理量である．

(2.80) 式の定義にしたがって微分を繰り返して計算すればリーマンテンソルの表式が導かれる．具体的には

$$A^\mu{}_{;\beta} = A^\mu{}_{,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}A^\nu, \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned} A^\mu{}_{;\beta\alpha} &= (A^\mu{}_{;\beta})_{,\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}A^\nu{}_{;\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha}A^\mu{}_{;\lambda} \\ &= A^\mu{}_{,\beta\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha}A^\nu + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}A^\nu{}_{,\alpha} \\ &\quad + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha}(A^\nu{}_{,\beta} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\beta}A^\lambda) - \Gamma^\lambda{}_{\beta\alpha}(A^\mu{}_{,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}A^\nu) \end{aligned} \tag{2.82}$$

とし，(2.82) 式の α と β に関して対称でない項にのみ注目すればよいから

$$\begin{aligned} &A^\mu{}_{;\beta\alpha} - A^\mu{}_{;\alpha\beta} \\ &= \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha}A^\nu - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta}A^\nu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta}A^\nu - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}A^\nu \\ &= (\Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha})A^\nu. \end{aligned} \tag{2.83}$$

したがって

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} &= \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} \\ &= \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}. \end{aligned} \tag{2.84}$$

このように，リーマンテンソルはクリストッフェル記号 (したがって計量テンソル) だけで書き下される．(2.84) 式の右辺の 2 つめの等式のように書き直すと，下添字 α と β の順序が自然に思えるであろう[28]．

2.3.4 高階テンソル

ベクトル同士のテンソル積から 2 階テンソルをつくったのと同様の操作を繰り返せば，任意の階数のテンソルを構築できることは明らかであろう．相対論で用いられることが多いのは，0 階テンソル，1 階テンソル，2 階テンソル，4 階テンソルである．前 2 者はそれぞれスカラー，ベクトルとも呼ばれる．上述のリーマンテンソルは 4 階テンソルの例であり

$$R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}^\alpha \otimes \boldsymbol{e}^\beta \otimes \boldsymbol{e}^\gamma \tag{2.85}$$

---

[28] ただし，(2.84) 式の右辺とは符号が異なるものをリーマンテンソルと定義してある文献も存在するので油断は禁物である．

と表現される[29]．基底の選び方を変えれば同じ物理量を

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}^{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\beta}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma} \tag{2.86}$$

のように表現できる[30]．高階テンソルの成分の添字の上げ下げも

$$g_{\nu\mu}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}=R_{\nu\alpha\beta\gamma} \tag{2.87}$$

のように，$g^{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ を用いて行えばよい．

一方，すでに述べたように，クリストッフェル記号はその添字から予想できるような 3 階テンソルではないので，

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\beta} \tag{2.88}$$

には対応していない．

ベクトル同士の内積を一般化して，テンソル同士の内積のようなものを定義することができる．たとえば，4 階テンソル $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\beta}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}$ と 2 階テンソルと $g^{\nu\lambda}\boldsymbol{e}_{\nu}\otimes\boldsymbol{e}_{\lambda}$ との内積を考えてみる．この場合，テンソル積の何番目の基底ベクトルと内積をとるかを指定しなければならないので，ここでは 4 階テンソルの 1 番目と 3 番目の基底ベクトルとの内積をとるものとしよう．その内積を以下のように括弧で表現するならば，線形性より

$$\begin{aligned}
&(g^{\nu\lambda}\boldsymbol{e}_{\nu}\otimes\boldsymbol{e}_{\lambda},R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\beta}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma})_{1,3}\\
&\equiv g^{\nu\lambda}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}\underbrace{(\boldsymbol{e}_{\nu},\boldsymbol{e}_{\mu})}_{=g_{\nu\mu}}\boldsymbol{e}^{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{e}_{\lambda},\boldsymbol{e}^{\beta})}_{=\delta_{\lambda}{}^{\beta}}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}\\
&=g^{\nu\lambda}R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}g_{\nu\mu}\delta_{\lambda}{}^{\beta}\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}=g^{\nu\lambda}R_{\nu\alpha\beta\gamma}\delta_{\lambda}{}^{\beta}\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}\\
&=g^{\nu\beta}R_{\nu\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}\\
&=R^{\beta}{}_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

と変形できる．今の場合，4 階テンソルであるリーマンテンソルから変換された 2 階テンソルをリッチテンソルと定義し

$$R^{\beta}{}_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma}\equiv R_{\alpha\gamma}\boldsymbol{e}^{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{\gamma} \tag{2.90}$$

と記す．このように，計量テンソルとの内積をとることによってテンソルの階数を 2 つだけ下げることを縮約とよぶ．テンソルの成分で言えば，上の添字と下の添字のどれか

---

[29] 以前の言いかたにしたがうと 4 行 4 列 4 列 4 列の「行列列列」に対応する．もちろん，通常の行列の形式でわかりやすく表現することは困難である．

[30] こちらも強いて言えば，4 列 4 列 4 列 4 列の「列列列列」に対応する．

のペアについて足しあげることに帰着する[31)].

リッチテンソルをもう一度縮約すると

$$\begin{aligned}(R_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\nu}, g^{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}}\otimes\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}}) &= R_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\boldsymbol{e}^{\mu},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}})(\boldsymbol{e}^{\nu},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}})\\ &= R_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} = R_{\mu\nu}g^{\nu\mu} = R^{\nu}{}_{\nu}\\ &\equiv R\end{aligned} \tag{2.91}$$

となり，この最後の量をリッチスカラーと呼ぶ.

2.3.5 テンソルの成分だけを用いた相対論の表現

物理的に意味のあるすべての方程式は，基底の選びかたに依存してはならない．つまり，異なる物理量をあらわすテンソルを等値したものであるべきだ．たとえば 2 階のテンソルに対応する物理量の場合，

$$\begin{cases}G^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu} = T^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu}, & G_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\nu} = T_{\mu\nu}\boldsymbol{e}^{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\nu},\\ G^{\mu}{}_{\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\nu} = T^{\mu}{}_{\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}^{\nu}, & G_{\mu}{}^{\nu}\boldsymbol{e}^{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu} = T_{\mu}{}^{\nu}\boldsymbol{e}^{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu}\end{cases} \tag{2.92}$$

のような表式となる．これらの左辺と右辺には，$\boldsymbol{e}_{\mu}$ と $\boldsymbol{e}^{\nu}$ が陽に登場しているものの，それぞれ $G^{\mu'\nu'}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu'}}\otimes\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu'}} = G^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu}$ のような関係が成り立つという意味では，基底の選びかたにはよらない．つまり共変ではなく不変ということである．

ところで，これらの両辺の基底は互いに一次独立となるように選ばれているから，それらの展開係数であるテンソルの成分もそれぞれ等しい．つまり，

$$G^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu} = T^{\mu\nu}\boldsymbol{e}_{\mu}\otimes\boldsymbol{e}_{\nu} \Longrightarrow G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} \tag{2.93}$$

のように，1 つのテンソル方程式が 4×4 個のテンソルの成分に対する方程式に置き換えられる．この成分に対する方程式には基底が陽に登場していないにもかかわらず，$G^{\mu\nu}$, $T^{\mu\nu}$ ともに基底の選びかたに依存した量である．ただし，これらはともに基底の変換に対して同一の変換則にしたがうため $G^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$ ならば $G^{\mu'\nu'} = T^{\mu'\nu'}$ となり，方程式自身は基底の選びかたには無関係に常に成り立つ (共変である)．さらに計量を用いて添字の上げ下げを行うことで，他の 3 つの方程式 $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, $G_{\mu}{}^{\nu} = T_{\mu}{}^{\nu}$, $G^{\mu}{}_{\nu} = T^{\mu}{}_{\nu}$ がただちに導かれる．

このように考えてくると,「物理量 ＝ テンソル ＝ 基底 ＋ 成分」という思想は大切ではあるものの，常に基底をひきずった記法を使いつづけるのはあまり実用的ではない．

---

31) リーマンテンソルの成分 $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ の場合，上の添字 μ を下のどの添字と縮約するかは 3 通りの可能性があるが，3 番めの添字と縮約したものをリッチテンソルと定義するのが普通である．

今まで繰り返し強調してきた相対論マインドの理解を前提とするならば，テンソルの成分だけを用いる方式のほうがはるかに便利である．本書でも以降の議論ではもはや基底は登場しないので，今までの結果をテンソルの成分だけを用いて要約しておく[32)]．

(i) 物理量の表現： 物理量は時空の各点で局所的に定義されるテンソル (スカラー，ベクトルを含む) で表現される．

(ii) テンソル： テンソルは 0 から 3 までを走る添字を上下にもつ量で，その添字に対応した座標の変換則にしたがう．添字を持たないテンソルを特にスカラーと呼び，同じ世界点を異なる座標系で表現したものを x' と x で記せば

$$S'(x') = S(x) \tag{2.94}$$

という性質をもつ．これは，右辺の $S(x)$ に $x = x(x')$ を代入して x' のみの式にしたものをあらためて x' の関数とみなして $S'(x')$ とする，という意味である．座標変換によって同じ点における S と S' の値は変わらないが，それらの具体的な関数形は変わることに注意してほしい．つまり，$S(x') = S(x)$ ではない[33)]．このことは一般のテンソルの変換則：

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_m}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_n}(x') = \left(\frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\mu'_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x^{\nu'_n}}\right)T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n}(x). \tag{2.95}$$

においても同様である．これは線形変換であるから，すべての成分が恒等的に 0 となるテンソルを考えない限り，どのような座標系を選ぼうともテンソルの成分をすべて同時に 0 とすることはできない．

---

32) 特に断らない限り以下では (断腸の思いではあるが)，便宜上「テンソル」と「テンソルの成分」とを区別せず同義で用いる．

33) ただし，物理学ではこのような関数形が変わる場合であっても，$F(x(u)) = F'(u)$ とはせず左辺の関数を単に $F(u)$ と書くことが決して少なくないので混乱しないでほしい．具体的に無限小距離を例にとると，極座標を $'$ 系として

$$\begin{aligned} &S(t,x,y,z) = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \\ &S(t, x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)) = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \\ &\qquad \equiv S'(t,r,\theta,\varphi) \end{aligned}$$

なので，$S(t,x,y,z) = S'(t,r,\theta,\varphi) \neq S(t,r,\theta,\varphi) \equiv -dt^2 + dr^2 + d\theta^2 + d\varphi^2$ は自明であろう．もちろん，そもそも座標に依存しないスカラー量 (粒子の電荷，静止質量など) は，文字どおり定数なのでこの注意は気にしなくともよい．

(iii) 添字の上げ下げ： 添字の上下左右の位置にはすべて意味があるので，それらを勝手に変更してはならない．ただし，添字の上げ下げは，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ とその逆行列 $g^{\mu\nu}$：

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{2.96}$$

を用いて自由に行うことができる．たとえば，

$$g_{\alpha\beta}T^{\mu\beta\nu} = T^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}, \quad g^{\alpha\beta}T^{\mu}{}_{\beta\nu} = T^{\mu\alpha}{}_{\nu}. \tag{2.97}$$

(iv) 共変微分： テンソルを共変微分すると，階数が 1 つ高いテンソルとなる．

$$\begin{aligned} &T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n;\gamma} \\ &= T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n,\gamma} + \sum_{i=1}^{m} \Gamma^{\alpha_i}{}_{\boldsymbol{\mu}\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\boldsymbol{\mu}\alpha_{i+1}\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_n} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \Gamma^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\beta_j\gamma} T^{\alpha_1\cdots\alpha_m}{}_{\beta_1\cdots\beta_{j-1}\boldsymbol{\mu}\beta_{j+1}\cdots\beta_n}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

ここで，$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ はクリストッフェル記号：

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \equiv g^{\gamma\mu}\Gamma_{\mu\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\mu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{2.99}$$

で，その変換則は

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}} \tag{2.100}$$

で与えられる．これは (2.95) 式とは異なっているので，クリストッフェル記号はテンソルではない．実際，座標系をうまく選べば $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ のすべての成分を同時に 0 とすることが可能である．

2.4 測地線の方程式

ニュートンの第 1 法則によれば，「外力が働かない場合の質点の軌道は直線」，すなわち

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0 \tag{2.101}$$

である．ユークリッド空間を前提としたこの結論を，リーマン時空における一般相対論の場合に拡張すれば，「重力以外の力が働かない場合の質点の軌道は測地線である」ということになる．この測地線の方程式こそ，重力場中の粒子の運動方程式なのである．そ

の方程式はいろいろな考え方から導くことができるが[34)]，もっとも単純なのは，ニュートン力学において自由粒子の運動方程式を

$$\delta I = \delta \left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} L \, dt \right) = \frac{1}{2} m \delta \left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} |\boldsymbol{v}|^2 \, dt \right) = 0 \tag{2.102}$$

という変分原理から導く方法を一般化するやり方である．(2.102) 式は

$$\begin{aligned} dt &\Longrightarrow d\tau, \\ |\boldsymbol{v}|^2 = \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} &\Longrightarrow g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \end{aligned} \tag{2.103}$$

と置き換えることで共変化できて

$$I \equiv \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} L \, d\tau = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \, d\tau \equiv \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathscr{I} \, d\tau \tag{2.104}$$

となる．実際に (2.104) 式を変分して測地線の方程式を具体的に求めてみよう．

$\delta I = 0$ に対応するオイラー-ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial (dx^\mu / d\tau)} - \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.105}$$

で与えられる．これを計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathscr{I}}{\partial (dx^\mu / d\tau)} &= \frac{d}{d\tau} \left[g_{\alpha\beta} \left(\delta^\alpha{}_\mu \frac{dx^\beta}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \delta^\beta{}_\mu \right) \right] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} + g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) = 2 \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \\ &= 2 \left(g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right), \end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\frac{\partial \mathscr{I}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{2.107}$$

これらを (2.105) 式に代入すると

$$g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{2.108}$$

(2.108) 式の両辺に $g^{\gamma\mu}$ をかけて μ について和をとると

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\tau^2} + g^{\gamma\mu} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{2.109}$$

この式を (2.67) 式で定義されるクリストッフェル記号：

---

34) 『入門』3.1 節.

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} \equiv g^{\gamma\mu}\Gamma_{\mu\alpha\beta}, \quad \Gamma_{\mu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{2.110}$$

を用いて書き直せば

$$\frac{d^2 x^{\gamma}}{d\tau^2} + \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0 \tag{2.111}$$

と書く．これが測地線の方程式であり，クリストッフェル記号がそのまま登場していることがわかった．

このように自由粒子は幾何学的な測地線に沿って「たんたんと」進むのである．しかしこのままでは，重力がどこに入っているのかがよくわからない．そこらあたりを理解するために，ニュートン理論との対応を考えてみよう．まず (2.111) 式の空間成分を書き下すと

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^{i}{}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^{i}{}_{0j}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^j}{d\tau}\right)$$
$$+ \Gamma^{i}{}_{jk}\left(\frac{dx^j}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^k}{d\tau}\right) = 0. \tag{2.112}$$

ここで，時空がミンコフスキー計量からあまりずれていない場合：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.113}$$

を考えると，

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}\left(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu}\right). \tag{2.114}$$

さらに，質点の速度が非相対論的な場合 ($|v^i| \ll 1$) には，(2.112) 式の第 3 項と第 4 項は無視できる．また，

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\eta_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} - h_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= dt^2\left((1 - \delta_{ij}v^i v^j) - h_{00} - 2h_{0i}v^i - h_{ij}v^i v^j\right) \\ &\approx dt^2 \end{aligned} \tag{2.115}$$

と近似できる．したがって (2.112) 式は，

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^{i}{}_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}(2h_{j0,0} - h_{00,j}) \approx -\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{h_{00}}{2}\right). \tag{2.116}$$

ただし，ここで計量の時間変化が無視できる ($h_{j0,0} \approx 0$) ものとした．(2.116) 式は，ニュートン力学での重力ポテンシャル φ が計量と

$$\varphi = -\frac{h_{00}}{2} \tag{2.117}$$

という関係にあれば，ニュートン力学の運動方程式に帰着する．またこの場合，

$$h_{00} = -2\varphi \Longrightarrow g_{00} \approx -1 - 2\varphi,\ \Gamma^i{}_{00} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \tag{2.118}$$

が成り立つ．つまり，重力は $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ の中にちゃんと入っているわけだ．以上をまとめれば,

(i) $|v^i| \ll 1$: 質点の速度が非相対論的,

(ii) $|h_{\mu\nu}| \ll 1$: 重力場が弱い (時空がほぼミンコフスキー的),

(iii) $|h_{\mu\nu,0}| \approx 0$: 重力場が時間変化しない

という 3 条件を満たす場合，一般相対論で「自由粒子」の運動を記述する測地線方程式は，ニュートン理論の重力場のもとでの粒子の運動方程式に帰着することが示された.

2.5　重力場の方程式

測地線の方程式は，時空の幾何学を決める計量 $g_{\mu\nu}$ が与えられた場合に，物質がどのように運動するかを記述する．しかし，ではその $g_{\mu\nu}$ はどうやって決まるのであろうか．物質が運動することによって重力場が変化すれば，それに応じて $g_{\mu\nu}$ もまた変更を受けると考えるのは当然だ．それらを整合的に記述する方法論が必要である．本節ではあくまでその概観を紹介するだけにするので，より詳しくは，たとえば『入門』第 4 章を参照されたい.

2.5.1　時空と物質

まず，時空を表現する $g_{\mu\nu}$ に対して，抽象的な「物質分布」を具体的に表現する何らかのテンソル $T_{\mu\nu}$ が存在すると考えてみよう．これらの間に何らかの関係

$$\underbrace{g_{\mu\nu}}_{\text{時空}} \Longleftrightarrow \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{物質}} \tag{2.119}$$

をつけたいのである．じつはこのような物質分布を特徴づける 2 階のテンソルは確かに存在し，エネルギー運動量テンソルと呼ばれている.

たとえば，物質が存在しない状態 (真空) が $T_{\mu\nu} = 0$ であるとするならば，それに対応する $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$，つまり時空は平坦であるはずだ (平坦であってほしいような気がする)．このように，単に抽象的な (時空) = (物質) という思想にとどまらず，具体的に何か $T_{\mu\nu}$ を与えたときに $g_{\mu\nu}$ を計算して導くことができるような方程式は存在するのだろうか? さらに言えば

(1) そもそも世の中のすべてのことを支配する摂理があるかどうかすら不明である.

(2) 仮にそのような摂理が存在したとしても，それを具体的に我々の理解できるような形で表現できる保証はない．

(3) しかも，その表現型が我々の知っている数学，さらには微分方程式で書き下せると思うのは傲慢以外の何者でもない．

このように考え始めると，物質分布が決まったときに時空の性質を決定するような具体的な方程式を書き下すことなど不可能であると結論してしまいそうになる．しかし，奇跡的にもアインシュタインはそのような方程式を見つけてしまった[35)]．これが，重力場の方程式 (アインシュタイン方程式) である．

2.5.2 リーマンの曲率テンソル

一般相対論で本質的な役割を果たすリーマンテンソル (Riemann tensor) は

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} \equiv \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\gamma}\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \tag{2.120}$$

によって定義される[36)]．すでに (2.80) 式で示したように，リーマンテンソルは空間曲率を表す量で，共変微分が可換ではないことに関係する．(2.120) 式をみただけではリーマンテンソルが正しくテンソルの変換則に従うかどうかはすぐにはわからないが，A^α とその共変微分だけから書かれている (2.80) 式を見れば，テンソルであることが納得できるであろう．

リーマンテンソルは，後の添字 2 つに対して反対称：

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = -R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\beta}, \tag{2.121}$$

---

35) しかしこれはいろいろな意味で教訓的あるいは示唆的である．じつは上記の (1) から (3) で展開したような「常識的推論」は誤りで，自然界は基本的にはすべて数学で書き尽くされるのかもしれない．そんなことはなく，むしろ相対論は偶然にもうまくいった例に過ぎないのだろうか．そもそも我々個人の運動はとてもニュートンの法則に従っているようには見えない．これは我々には意志あるいは意識があるため，単純な自然の力に反して行動しているからである．ではやがて我々は「意識」，あるいはさらに「生物の進化」といったより根本的な物事を記述するようなマスター方程式を手に入れることができるのであろうか．それらが原理的には存在していることを認めたとしても，我々人類が理解できるような数学で記述できるかは自明でない．たとえば，ネアンデルタール人はどうがんばっても一般相対論を発見できたとは思えない．とすれば，ホモサピエンスが解明できる自然の摂理にも限界があり，それを超えるには我々ではなく突然変異によって誕生する次世代のスーパー人類を待たねばならないのかもしれない．

36) ここで用いた符号の定義 (教科書によって違っていることも多いのでさらに注意が必要であるが) の場合，(2.120) 式のように ∂_β を用いて書くと，左辺と右辺第 1 項および第 3 項の下添字の $\beta\gamma$ の順序がそろう．後は，$R \sim \partial\Gamma + \Gamma\Gamma$ の構造をしていることだけを覚えておき，下添字の $\beta\gamma$ について反対称であるように構成すれば自然と (2.120) 式にたどり着ける．

および 3 つの添字の循環和が 0：

$$R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + R^{\mu}{}_{\beta\gamma\alpha} + R^{\mu}{}_{\gamma\alpha\beta} = 0 \tag{2.122}$$

という性質を持つ．さらに，

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} \equiv g_{\mu\nu} R^{\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} \tag{2.123}$$

は，前の添字 2 つに対して反対称

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\mu\beta\gamma} \tag{2.124}$$

である．以上から $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ の独立成分は全部で 20 個しかないことを示すことができる．また，以上の対称性を組み合わせると，前後 2 対の添字をまとめて交換する対称性

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} \tag{2.125}$$

を持つこともわかる[37]．

リーマンテンソルは他にも，ビアンキ (Bianchi) の恒等式と呼ばれる重要な式：

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta;\gamma} + R^{\mu}{}_{\nu\beta\gamma;\alpha} + R^{\mu}{}_{\nu\gamma\alpha;\beta} = 0 \tag{2.126}$$

を満たす．また，添字の縮約により

$$\text{リッチ (Ricci) テンソル}：R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}, \tag{2.127}$$

$$\text{リッチスカラー}：R \equiv R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\alpha\beta} R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \tag{2.128}$$

が定義される．

2.5.3 エネルギー運動量テンソル

前節で述べたような抽象的な言い方だけでは，何を $T_{\mu\nu}$ として選べばよいかはまだピンとこない．そこで，非相対論的流体力学で登場した応力テンソル (運動量流束テンソルと呼ばれることもある) を 4 次元化したものをエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ として採用しよう (『入門』4.2 節，4.6.2 節参照)．

特に重要なのは，流体の静止系に乗って観測したときに，圧力が等方的 (= 応力が対角化されており，対角成分は同じ値を持つ) で粘性や熱伝導がない場合で，完全流体とよばれる．そのエネルギー運動量テンソルは，一般に次の形に書ける．

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}. \tag{2.129}$$

ここで，u^{μ} は流体の 4 元速度，ρ と p はそれぞれ流体の静止系で観測したときのエネルギー密度と圧力である．特に非相対論的完全流体に対しては $u^{\mu} \approx (1, v^{i})$, $g_{\mu\nu} \approx$

---

37) 『入門』問題 [2.8] および [2.9] 参照．

$\eta_{\mu\nu}$, $|v^i| \ll 1$, $p \ll \rho$ が成り立つから，近似的に

$$T^{\mu\nu} \approx \begin{pmatrix} \rho & \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z \\ \rho v_x & p + \rho v_x^2 & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y & \rho v_x v_y & p + \rho v_y^2 & \rho v_y v_z \\ \rho v_z & \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & p + \rho v_z^2 \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

に帰着する．つまり，(2.129) 式は非相対論的流体力学における応力テンソル：

$$\pi^{ij} = \rho v^i v^j + p\delta^{ij} \tag{2.131}$$

の相対論的拡張となっている．

2.5.4 アインシュタイン方程式

一般相対論においてもっとも本質的なのは，物質分布を与えたときに，それと整合的な時空の幾何学の計算を可能とする方程式 (アインシュタイン方程式) である．これは概念的には

$$\text{時空}\ (g_{\mu\nu}) = \text{物質}\ (T_{\mu\nu}) \tag{2.132}$$

と書ける．ここで，$g_{\mu\nu}$ は時空の計量テンソル，$T_{\mu\nu}$ は物質場のエネルギー運動量テンソルである．$g_{\mu\nu}$ は 10 個の独立成分を持っているので，もっとも単純なのは，(2.132) 式の両辺もまた 10 個の独立な式をもつように 2 階の対称テンソルで表現することである．そこで，重力場の方程式として

$$\underbrace{G_{\mu\nu}}_{g_{\alpha\beta}\ \text{から構成される幾何学量}} = \underbrace{\kappa}_{\text{定数}} T_{\mu\nu} \tag{2.133}$$

の形を仮定して，以下の要請を満たすような $g_{\alpha\beta}$ の汎関数 $G_{\mu\nu}$ を探すことにする．

(A) ミンコフスキー時空 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ に対しては 0 となる．

(B) 添字 μ と ν に対して対称 ($G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$).

(C) $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\alpha}$, $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ だけからできるテンソルである．

(D) 2 階微分 $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ に関しては線形.

(E) ${G^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$ を恒等的に満たす．

(定数倍の自由度を除いて) これらの要請を満たすテンソルは,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{2.134}$$

しかないことが証明できて，これをアインシュタインテンソルと呼ぶ

残っているのは κ の値であるが，これは非相対論的な場合にニュートン理論での重

力場の方程式に帰着することを要請すれば，$\kappa = 8\pi G/c^4$ となる．以上をまとめれば，一般相対論における重力場の方程式 (アインシュタイン方程式)：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.135}$$

を得る (『入門』4.3 節，4.4 節参照)．

ただしじつは，これは宇宙論で通常用いられているものとは少しだけ違っている．アインシュタイン方程式は重力場に対する方程式ではあるが，宇宙に対しては運動方程式と呼ぶこともできる．つまり，右辺の $T_{\mu\nu}$ の形を決めてやれば，(原理的には) 対応する時空がその時間発展をも含めて解として得られるはずである．アインシュタインは，空間的に一様な物質分布の場合を考えると，得られる解は動的なものしか許されないことに気づいた．つまり，大きさが変化しない「静的」な宇宙は解として存在しないのである．この考察を経てアインシュタインは (2.135) 式に変更を加えることにした．上述の要請のなかの (A) を捨てたのである．この場合でも，エネルギー運動量保存に対応する ${T_{\mu\nu}}^{;\nu} = 0$ に矛盾することなく与えられる自由度は，$g_{\mu\nu}$ の定数倍しか許されない．そこで，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{2.136}$$

の左辺に入る定数 Λ を導入した．これはアインシュタインの宇宙項 (cosmological term)，あるいは最近では宇宙定数 (cosmological constant) と呼ばれている．宇宙論を除く通常の現象では，その存在は事実上まったく無視できる．しかしながら宇宙そのものの進化に与える影響は甚大である．実際，現在の宇宙のエネルギー密度の約 7 割がこの宇宙定数によって占められていると推定されている (『入門』4.5 節参照)．

以上の構成法からわかるように，アインシュタイン方程式は，重力場を記述する上で一意的なものであるとは言えず，むしろ考えうる可能性のなかでもっとも単純なものである．そもそも重力場を記述する微分方程式が具体的に書き下せること自身驚くべきことのように思えるが，そのなかのもっとも簡単なモデルが提唱以来一世紀近く観測的・実験的検証にたえて，より複雑な変更を迫られなかったという事実もまた驚嘆すべきことといえよう．

アインシュタイン方程式は変分原理にもとづいて書くこともできる．これについては,『入門』4.6 節と，本書の例題 A および B を参照されたい．

第3章

球対称時空

一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式は，計量 $g_{\mu\nu}$ に関する複雑な非線型微分方程式である．したがって，それを解くことは容易ではない．そのため，(i) 極度に理想化した状況で厳密解を求めることで相対論的効果の本質を理解する，(ii) 重力場が弱いという近似のもとで，摂動的な解を求める，(iii) スーパーコンピュータを駆使して，現実的な状況下での数値解を求める，等の手法がとられている．これらは一般相対論的現象の解明において，互いに相補的で不可欠な役割を果たしている．本章では (i) の立場から，球対称という仮定のもとでアインシュタイン方程式を解くための定式化を紹介する．その具体例として，球対称真空解であるシュワルツシルド時空と一様等方宇宙モデルであるロバートソン-ウォーカー時空について述べる．(ii) については次章で取り扱う．本書では (iii) のアプローチについては議論しないので，興味がある読者は他書を参照されたい[1]．

3.1 球対称時空に対する計量とアインシュタイン方程式

球対称という仮定のもとで時空の計量の一般的な形を導いておこう．球座標 (r, θ, φ) を用いれば，球対称時空の計量の成分は角度座標に依存してはならないから

$$ds^2 = -A(r,t)\,dt^2 + B(r,t)\,dtdr + C(r,t)\,dr^2 + D(r,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{3.1}$$

---

[1] たとえば，柴田大『一般相対論の世界を探る — 重力波と数値相対論』(UP Physics 3, 東大出版会，2007)，富坂幸治・花輪知幸・牧野淳一郎編『シミュレーション天文学』(シリーズ現代の天文学 14, 日本評論社，2007).

という形になることはすぐわかる．さらに，r と t に関する座標変換の自由度が 2 つあることを用いれば

$$\begin{cases} r = f_1(r', t') \\ t = f_2(r', t') \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D(r,t) = r'^2 \\ B(r,t) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

という 2 つの条件を満たすように新たな座標 r' と t' を選ぶことができるはずである．その上で，

$$e^{2\phi(r',t')}\, dt'^2 \equiv A(r,t)\, dt^2, \quad e^{2\lambda(r',t')}\, dr'^2 \equiv C(r,t)\, dr^2 \tag{3.3}$$

とおいて，あらためて (r', t') を (r, t) と再定義すれば

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}\, dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}\, dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{3.4}$$

となる．これが球対称時空の一般的な線素である．

しかし，天体の重力収縮のように時間的に半径が変化する現象を記述する際にはむしろ，

$$\begin{cases} r = f_1(r', t') \\ t = f_2(r', t') \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} D(r,t) = \chi^2(r', t') \\ B(r,t) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

と選ぶ方が物理的に理解しやすい．つまり，動径座標 r と “半径” $\chi(r,t)$ を区別するわけだ．この場合，(3.4) 式は

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}\, dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}\, dr^2 + \chi^2(r,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{3.6}$$

となる．

このような変形をした結果として，r はもはや通常の意味での “半径” (すなわち原点からその場所までの距離) ではないことを注意しておこう．(3.6) 式で与えられる線素の角度部分から，$\chi(r,t)$ は原点を中心として $4\pi\chi^2$ の表面積をもつ球面の位置を特徴づけるパラメータである．その意味ではこの χ を “半径” と呼んでもよい[2)]．したがって，r はあくまで動径方向の座標を指定するパラメータでありさえすれば，その選び方には自由度が残されている．たとえば球対称時空の力学を考える際には，原点からある半径[3)]以内にある全質量 m を動径方向座標 r と同一視することも多い．この場合

[2)] ただし，1.2.2 節でも説明したように，これは我々がユークリッド空間において通常連想する意味での半径とは異なる．

[3)] ユークリッド空間以外では，この “半径” と r とは必ずしも同じ値とはならない．

$m(r)$ は時間的には不変である．その意味で，この r はラグランジュ座標である．これに対して $\chi(r,t)$ は，内側の質量が $m=m(r)$ となるような球の表面積が時間的に変化して $4\pi\chi^2$ となることを示すオイラー座標の役割を果たす．

(3.6) 式で与えられる計量に対するクリストッフェル記号は以下の通りである (例題 C 参照)．

$$\begin{cases} \Gamma^t{}_{tt} = \dot{\phi}, & \Gamma^t{}_{rr} = \dot{\lambda} e^{2\lambda-2\phi}, \\ \Gamma^t{}_{rt} = \Gamma^t{}_{tr} = \phi', & \Gamma^t{}_{\theta\theta} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}, \\ \Gamma^t{}_{\varphi\varphi} = \dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta, & \Gamma^r{}_{rr} = \lambda', \\ \Gamma^r{}_{tt} = \phi' e^{2\phi-2\lambda}, & \Gamma^r{}_{rt} = \Gamma^r{}_{tr} = \dot{\lambda}, \\ \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}, & \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta, \\ \Gamma^\theta{}_{t\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta t} = \dfrac{\dot{\chi}}{\chi}, & \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \dfrac{\chi'}{\chi}, \\ \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi t} = \dfrac{\dot{\chi}}{\chi}, \\ \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \dfrac{\chi'}{\chi}, & \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \cot\theta. \end{cases} \tag{3.7}$$

ここで，$\dot{}$ と $'$ はそれぞれ t と r に対する微分を表し，(3.7) 式に登場しない成分はすべて 0 である．

これらのクリストッフェル記号からリッチテンソル

$$R_{\alpha\beta} \equiv \partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\mu} \tag{3.8}$$

を求めれば，アインシュタインテンソル：

$$G^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta R^\mu{}_\mu \tag{3.9}$$

が計算できる．その結果を用いて，アインシュタイン方程式:

$$G^\alpha{}_\beta = 8\pi G T^\alpha{}_\beta \tag{3.10}$$

を具体的に書き下せば (例題 D 参照)，

$$8\pi G T^t{}_t = G^t{}_t = -\left(\frac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi} + \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi} + \left(\frac{2\chi''}{\chi} + \frac{\chi'^2}{\chi^2} - \frac{2\chi'\lambda'}{\chi}\right)e^{-2\lambda} - \frac{1}{\chi^2}, \tag{3.11}$$

$$8\pi G T^t{}_r = G^t{}_r = \frac{2e^{-2\phi}}{\chi}(\dot{\chi}' - \dot{\chi}\phi' - \dot{\lambda}\chi'), \tag{3.12}$$

$$8\pi G T^r{}_r = G^r{}_r = \left(\frac{2\chi'\phi'}{\chi} + \frac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda} - \left(\frac{2\ddot{\chi}}{\chi} + \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^2} - \frac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi}\right)e^{-2\phi} - \frac{1}{\chi^2}, \tag{3.13}$$

$$8\pi G T^\theta{}_\theta = G^\theta{}_\theta = -\left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\phi}\dot{\lambda} - \frac{\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \frac{\ddot{\chi}}{\chi} + \frac{\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right)e^{-2\phi} + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{\chi'\phi'}{\chi} - \frac{\chi'\lambda'}{\chi} + \frac{\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda} \tag{3.14}$$

となる．(φ,φ) 成分は (θ,θ) 成分とまったく同じ結果を与える．また，これら以外の成分はすべて 0 である．

3.2　完全流体に対するエネルギー運動量保存則

アインシュタイン方程式の右辺にくる物質場として重要なのは，完全流体[4]である．これはその流体と一緒になって動く静止系から観測したときに，圧力が等方的，かつ粘性や熱伝導がない場合である．そのエネルギー運動量テンソルは，

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \Longrightarrow T^\mu{}_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\delta^\mu{}_\nu \tag{3.15}$$

で与えられる (2.5.3 節)．ここで，u^μ は (観測者の系から測定したときの) 流体の 4 元速度，ρ と p はそれぞれ流体の静止系で観測したときのエネルギー密度と圧力である．

このように $T^\mu{}_\nu$ は考えている u^μ によって複雑となりうる．ただし，球対称問題においては流体の運動も球対称に限られるので，球座標を選んで流体の運動とともに動く座標系 (共動座標系) を (r,θ,φ) とすると，その系から見れば流体は静止している[5]．すなわち，この系では，流体の 4 元速度 $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ が

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = e^{-\phi}\ (u_t = g_{tt}u^t = -e^\phi), \quad u^r = u^\theta = u^\varphi = 0 \tag{3.16}$$

となる．非球対称の場合には場所ごとに流体は複雑な運動をするため，このような単純な静止系を座標に選ぶことができず，問題が難しくなる．

(3.16) 式を (3.15) 式に代入すれば，静止系におけるエネルギー運動量テンソル：

$$\begin{cases} T_{tt} = \rho e^{2\phi}, \quad T_{rr} = p e^{2\lambda}, \quad T_{\theta\theta} = p\chi^2, \quad T_{\varphi\varphi} = p\chi^2\sin^2\theta, \\ T^t{}_t = -\rho, \quad T^r{}_r = T^\theta{}_\theta = T^\varphi{}_\varphi = p, \quad \text{他の成分は } 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

---

[4] perfect fluid の訳．理想流体 (ideal fluid) と呼ばれることもある．

[5] 混乱する言い方かもしれないが，この意味では「共動座標系 = 流体の静止系」ということになる．

が得られる．このように共動座標系を選ぶことで，エネルギー運動量テンソルは対角化された単純な表式となる．

完全流体に対するアインシュタイン方程式を具体的に議論する前に，対応するエネルギー運動量保存則 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ を調べておこう．その際には，2 階対称テンソルに対して成り立つ公式：

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} T^{\mu\alpha} \tag{3.18}$$

を使うと少し計算が楽である (例題 A.4 参照)．ここで g は $g_{\mu\nu}$ の行列式で負の値をとる．(3.6) 式の線素の場合，計量は対角化されているので

$$\sqrt{-g} = e^{\phi+\lambda}\chi^2 \sin\theta \tag{3.19}$$

と簡単に計算できる．

(3.17) 式と (3.19) 式を用いて (3.18) 式を計算してみよう．まず，t-成分は

$$\begin{aligned} T^\mu{}_{t;\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}T^\mu{}_t)}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial t} T^{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}T^t{}_t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\dot{g}_{tt}T^{tt} + \dot{g}_{rr}T^{rr} + \dot{g}_{\theta\theta}T^{\theta\theta} + \dot{g}_{\varphi\varphi}T^{\varphi\varphi}\right) \\ &= -\frac{1}{e^{\phi+\lambda}\chi^2} \frac{\partial(\rho e^{\phi+\lambda}\chi^2)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(2\dot{\phi}T^t{}_t + 2\dot{\lambda}T^r{}_r + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}T^\theta{}_\theta + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}T^\varphi{}_\varphi\right) \\ &= -\dot{\rho} - 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}\rho - \dot{\phi}\rho - \dot{\lambda}\rho + \dot{\phi}\rho - \left(\dot{\lambda} + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}\right)p = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

同様にして r-成分は

$$\begin{aligned} T^\mu{}_{r;\mu} &= \frac{1}{e^{\phi+\lambda}\chi^2} \frac{\partial(\rho e^{\phi+\lambda}\chi^2)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(-2\phi'\rho + 2\lambda' p + 4\frac{\chi'}{\chi}p\right) \\ &= p' + \phi'\rho + \phi' p = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

残る θ-成分と φ-成分は

$$T^\mu{}_{\theta;\mu} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(p\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}p = \frac{\partial p}{\partial\theta} = 0, \tag{3.22}$$

$$T^\mu{}_{\varphi;\mu} = \frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0, \tag{3.23}$$

のように自明な式でしかない．

このように，直接アインシュタイン方程式を経由することなくエネルギー運動量保存則だけから得られる方程式は (3.20) 式と (3.21) 式，すなわち

$$\dot{\rho} + \left(\dot{\lambda} + 2\frac{\dot{\chi}}{\chi}\right)(\rho + p) = 0, \tag{3.24}$$

$$\phi' + \frac{1}{\rho + p}p' = 0 \tag{3.25}$$

の 2 つである．ただし，これらはアインシュタイン方程式 ((3.11)〜(3.14) 式) と独立ではない．これは，アインシュタインテンソルがビアンキの恒等式 $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ を満たすために，アインシュタイン方程式 $G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$ を通じて，右辺のエネルギー運動量保存則が自動的に保証されているからである．ニュートン力学における重力場の方程式 (ポアソン方程式) はニュートンの運動方程式とは独立だし，電磁場の方程式であるマクスウェル方程式はローレンツ力の式とは独立である．しかしながら，アインシュタイン方程式は場の方程式であるにもかかわらず，対応する運動方程式を含んでいるという著しい性質をもつわけだ．

3.3 球対称時空における完全流体の運動方程式

完全流体のエネルギー運動量テンソルを与える (3.17) 式を (3.11)〜(3.14) 式に代入すれば，対応するアインシュタイン方程式：

$$-8\pi G\rho\chi^2 = -(2\dot{\chi}\dot{\lambda}\chi + \dot{\chi}^2)e^{-2\phi} + (2\chi''\chi + \chi'^2 - 2\chi'\lambda'\chi)e^{-2\lambda} - 1, \tag{3.26}$$

$$0 = \dot{\chi}\phi' + \dot{\lambda}\chi' - \dot{\chi}', \tag{3.27}$$

$$8\pi G p\chi^2 = (2\chi'\phi'\chi + \chi'^2)e^{-2\lambda} - (2\ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}^2 - 2\dot{\chi}\dot{\phi}\chi)e^{-2\phi} - 1, \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} 8\pi G p\chi^2 = &-(\ddot{\lambda}\chi^2 + \dot{\lambda}^2\chi^2 - \dot{\phi}\dot{\lambda}\chi^2 - \dot{\chi}\dot{\phi}\chi + \ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}\dot{\lambda}\chi)e^{-2\phi} \\ &+ (\phi''\chi^2 + \phi'^2\chi^2 - \lambda'\phi'\chi^2 + \chi'\phi'\chi - \chi'\lambda'\chi + \chi''\chi)e^{-2\lambda} \end{aligned} \tag{3.29}$$

が得られる．今の場合，変数は ϕ, λ, χ, ρ, p の 5 個であるが，独立な方程式は 4 つしかないので，条件が 1 つ足りない．通常それを補うのが，圧力 p とエネルギー密度 ρ の関係を与える状態方程式 $p = p(\rho)$ である．

上記のアインシュタイン方程式はかなり複雑な形に見えるが，整理すればニュートン力学に基づいた流体の方程式系との対応関係がよりわかりやすいような方程式系に変形できる．その際には，これらとは独立ではないものの (3.24) 式と (3.25) 式も適宜利用すると便利である．

3.3.1 アインシュタイン方程式の tt 成分の変形

まず，r は共動座標系からみると時間変化しないが，$\chi(r,t)$ は変化することに注意し[6)]，$d\tau \equiv e^{\phi}dt$ で定義される共動座標系の固有時間で χ を微分した「速度」:

$$u \equiv \frac{\partial\chi}{\partial\tau} = \frac{1}{e^{\phi}}\frac{d\chi}{dt} = e^{-\phi}\dot{\chi} \tag{3.30}$$

を導入する．このとき

$$u' = (e^{-\phi}\dot{\chi})' = e^{-\phi}(\dot{\chi}' - \phi'\dot{\chi}) \underbrace{=}_{(3.27)\text{ 式より}} e^{-\phi}\dot{\lambda}\chi' \tag{3.31}$$

だから，

$$2e^{-\phi}\chi u\dot{\lambda} = 2\chi u\frac{u'}{\chi'} = \chi\frac{\partial u^2}{\partial\chi} \tag{3.32}$$

が成り立つ．さらに，天下り的ではあるが

$$\Gamma \equiv e^{-\lambda}\chi' \tag{3.33}$$

を定義すると

$$\frac{\partial}{\partial\chi}(\chi\Gamma^2) = \Gamma^2 + 2\chi\Gamma\frac{\partial\Gamma}{\partial\chi} = e^{-2\lambda}(\chi'^2 + 2\chi\chi'' - 2\chi\chi'\lambda') \tag{3.34}$$

となる．

(3.30) 式，(3.32) 式，および (3.34) 式を (3.26) 式に代入すると

$$\begin{aligned} 8\pi G\rho\chi^2 &= 1 + u^2 + \chi\frac{\partial u^2}{\partial\chi} - \underbrace{(2\chi''\chi + \chi'^2 - 2\chi'\lambda'\chi)e^{-2\lambda}}_{=\partial(\chi\Gamma^2)/\partial\chi} \\ &= \frac{\partial}{\partial\chi}\left[\chi(1 + u^2 - \Gamma^2)\right]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

これを積分して

$$\Gamma = \sqrt{1 + u^2 - \frac{2G}{\chi}\int_0^{\chi} 4\pi\rho\chi^2\,d\chi} \tag{3.36}$$

を得る．この積分定数は，原点 $(r=0)$ 近傍では平坦な空間になるように決定した．つまり，(3.6) 式が原点近傍で

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}dt^2 + d\chi^2 + \chi^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \tag{3.37}$$

に一致することを要請して

$$e^{2\lambda}dr^2 \approx d\chi^2 \Longrightarrow \Gamma = e^{-\lambda}\frac{\partial\chi}{\partial r} \approx 1 \quad (r=0,\ \chi=0) \tag{3.38}$$

---

6) すでに述べたように，r をラグランジュ座標，χ をオイラー座標と解釈してもよい．

となるように決めたのである[7]．ところで，(3.36) 式に登場する積分：

$$m(r,t) \equiv \int_0^{\chi(r,t)} 4\pi\rho\chi^2\,d\chi \tag{3.39}$$

は，半径 r の球の「質量」と解釈することができる．結局，(3.26) 式は

$$\Gamma^2 \equiv (e^{-\lambda}\chi')^2 = 1 + u^2 - \frac{2Gm}{\chi} \tag{3.40}$$

に帰着する．この式を少し変形すれば

$$\frac{1}{2}u^2 - \frac{Gm(r,t)}{\chi} = \frac{\Gamma^2 - 1}{2} \tag{3.41}$$

となることからもわかるように，右辺は単位質量あたりの流体のエネルギーに対応する．

3.3.2 アインシュタイン方程式の rr 成分の変形

(3.30) 式の時間微分を計算すれば

$$\dot{u} = \ddot{\chi}e^{-\phi} - \dot{\chi}\dot{\phi}e^{-\phi}. \tag{3.42}$$

これを用いて (3.28) 式を変形すると

$$\begin{aligned} 8\pi Gp\chi^2 &= (2\chi'\phi'\chi + \chi'^2)e^{-2\lambda} - (2\ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}^2 - 2\dot{\chi}\dot{\phi}\chi)e^{-2\phi} - 1 \\ &= \left(2\chi\frac{\phi'}{\chi'} + 1\right)\Gamma^2 - u^2 - 2\chi\dot{u}e^{-\phi} - 1. \end{aligned} \tag{3.43}$$

さらに (3.25) 式と (3.40) 式を代入すれば

$$\begin{aligned} 8\pi Gp\chi^2 &= -\frac{2\chi\Gamma^2}{\rho + p}\frac{\partial p}{\partial \chi} - 2\chi\dot{u}e^{-\phi} - \frac{2Gm}{\chi} \\ \Longrightarrow e^{-\phi}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1 + u^2 - 2Gm/\chi}{\rho + p}\frac{\partial p}{\partial \chi} - \frac{Gm}{\chi^2} - 4\pi Gp\chi. \end{aligned} \tag{3.44}$$

3.3.3 まとめ

最後に (3.24) 式に (3.32) 式と (3.30) 式を代入すると

$$\dot{\rho} + \left(\frac{u'}{\chi'}e^{\phi} + 2\frac{u}{\chi}e^{\phi}\right)(\rho + p) = 0. \tag{3.45}$$

これで変形は完了である．まとめると，座標 r と時間 t の関数である 6 つの独立変数を，速度 u, 半径 χ, 質量 m, 圧力 p, エネルギー密度 ρ, に加えて $\phi\ (= \log\sqrt{g_{rr}})$ と

---

[7] 原点付近で密度 ρ が χ の冪関数となる場合，この要請が満たされるためには $\rho \propto \chi^{-2+k}$ $(k \geq 0)$ が必要．したがって原点に有限な質点をおいた場合には成り立たない．

選べば,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -e^{\phi}\left[\frac{1}{\rho+p}\left(1+u^2-2\frac{Gm}{\chi}\right)\frac{\partial p}{\partial \chi}+\frac{Gm}{\chi^2}+4\pi Gp\chi\right], \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = e^{\phi}u, \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -e^{\phi}\left(\frac{u'}{\chi'}+2\frac{u}{\chi}\right)(\rho+p), \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi\rho\chi^2\frac{\partial \chi}{\partial r} \tag{3.50}$$

となる．(3.46) 式は流体の運動方程式 (オイラー方程式) で，右辺第 1 項が圧力勾配，第 2 項が重力を表す．第 3 項は，相対論では圧力も重力源として働くことを示している．(3.47) 式はオイラー座標としての流体の半径の発展方程式である．(3.48) 式は流体のエネルギー密度の時間変化，(3.49) 式は圧力勾配と計量の関係，(3.50) 式は動径座標 r 内の領域の質量を表す．これら 5 つの方程式に状態方程式 $p = p(\rho)$ を与えれば，原理的には 6 つの未知関数を求めることができるはずだが，実際には解析解を求めることは困難で，通常は数値計算を行うしかない．

3.4 圧力が無視できる物質の球対称重力収縮

通常，ガスからなる星ではその密度が高くなると重力に対して圧力 p が無視できるようになり重力と圧力のつり合いが破れ，重力収縮を起こす．したがって重力を支える圧力がどのような状態方程式に従うかによって，そのような天体の最終状態が決まる．電子の縮退圧によって重力収縮が止まれば白色矮星，中性子の縮退圧によって支えられたものが中性子星，それらによっても重力収縮を止めることができなければ，ブラックホールになると考えられている．本節では $p = 0$ の物質 (ダストと呼ばれることがある) の球対称な重力収縮の動力学を考察してみる．

まず (3.49) 式より，$p = 0$ の場合 ϕ は動径座標 r には依存せず時間のみの関数となる．この場合 $e^{\phi}dt \longrightarrow dt$ と再定義すれば (3.46) 式 ~(3.50) 式に ϕ はもはや登場しない．したがって，(3.33) 式を時間について微分して (3.31) 式を用いれば

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\lambda}\frac{\partial \chi}{\partial r}\right) = \left(-\frac{\partial \lambda}{\partial t}\frac{\partial \chi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial r\partial t}\right)e^{-\lambda}$$

$$= \left(-\frac{u'}{\chi'}\chi' + \frac{\partial u}{\partial r}\right)e^{-\lambda} = 0. \tag{3.51}$$

つまり，$p = 0$ の場合 Γ は時間に依存しない r のみの関数となる．したがってダスト宇宙では (3.6) 式を

$$ds^2 = -dt^2 + \left(\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{\partial \chi(r,t)}{\partial r}\right)^2 dr^2 + \chi^2(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{3.52}$$

と書き直すことができる．

(3.40) 式を時間で微分した結果に，(3.46) 式と (3.47) 式を (ただし $p = 0$，したがって $\phi = 0$ とする) 代入すれば

$$2\Gamma\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 2u\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{2G}{\chi}\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{2Gm}{\chi^2}\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{2G}{\chi}\frac{\partial m}{\partial t} \tag{3.53}$$

となる．したがって，Γ と同じく m もまた時間に依存しない r のみの関数であることがわかる．この場合 (3.40) 式：

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \sqrt{\Gamma^2(r) - 1 + \frac{2Gm(r)}{\chi}} \Longrightarrow t = \int\sqrt{\frac{\chi}{2Gm + (\Gamma^2 - 1)\chi}}d\chi \tag{3.54}$$

は以下のように積分できる (例題 E 参照)．

$$t_0(r) - t = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2Gm\chi + (\Gamma^2-1)\chi^2}}{\Gamma^2 - 1} - \dfrac{2Gm}{(\Gamma^2-1)^{3/2}}\sinh^{-1}\sqrt{\dfrac{(\Gamma^2-1)\chi}{2Gm}} & (\Gamma^2 - 1 > 0), \\ \sqrt{\dfrac{2}{9Gm}}\chi^{3/2} & (\Gamma^2 - 1 = 0), \\ \dfrac{\sqrt{2Gm\chi - (1-\Gamma^2)\chi^2}}{1 - \Gamma^2} - \dfrac{2Gm}{(1-\Gamma^2)^{3/2}}\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{(1-\Gamma^2)\chi}{2Gm}} & (\Gamma^2 - 1 < 0). \end{cases} \tag{3.55}$$

ここで $t_0(r)$ は r ごとに決まる積分定数で，いずれも $\chi = 0$ となる時刻を $t = t_0(r)$ となるように定めている．今の場合，$\chi > 0$ から $\chi = 0$ へと収縮する解を考えているので，$t < t_0(r)$ である．

さて，$t \longrightarrow t_0$ で $\chi \longrightarrow 0$ の状況では，(3.54) 式の右辺の $\Gamma^2 - 1$ は相対的に無視できるようになるので，Γ^2 の値にはよらず

$$t_0(r) - t \approx \sqrt{\frac{2}{9Gm}}\chi^{3/2} \Longleftrightarrow \chi(r,t) \approx \left(\frac{9Gm}{2}\right)^{1/3} (t_0(r) - t)^{2/3}, \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial \chi(r,t)}{\partial r} \approx \frac{\partial m}{\partial r} \left(\frac{G}{6}\right)^{1/3} m^{-2/3} (t_0(r) - t)^{2/3} + \frac{\partial t_0(r)}{\partial r} \left(\frac{4Gm}{3}\right)^{1/3} (t_0(r) - t)^{-1/3} \tag{3.57}$$

のように振る舞う．

これを (3.52) 式に用いれば，$\partial t_0(r)/\partial r \neq 0$ の場合，dr に対応する動径方向の距離の $t \longrightarrow t_0$ の極限における主要項は

$$d\ell = \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{\partial \chi(r,t)}{\partial r}\, dr \approx \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{\partial t_0(r)}{\partial r} \left(\frac{4Gm}{3}\right)^{1/3} (t_0(r) - t)^{-1/3}\, dr. \tag{3.58}$$

同じく，(3.50) 式より密度は

$$\rho(r,t) = \frac{m'}{4\pi\chi^2\chi'} \propto \frac{1}{[t_0(r) - t]^2} \tag{3.59}$$

となり，いずれも $t \longrightarrow t_0$ で発散する．一方，体積要素は

$$dV_p = 4\pi \int \frac{\chi^2(r)}{\Gamma(r)} \frac{\partial \chi(r,t)}{\partial r}\, dr \approx \frac{12\pi Gm}{\Gamma(r)} \frac{\partial t_0(r)}{\partial r} (t_0(r) - t)\, dr \tag{3.60}$$

となるので，$t \longrightarrow t_0$ で 0 に近づく．

しかし仮に $\partial t_0(r)/\partial r = 0$ であれば (3.57) 式の第 2 項は消えるので，$t \longrightarrow t_0$ での振舞は

$$d\ell \propto (t_0(r) - t)^{2/3}, \quad dV_p \propto (t_0(r) - t)^2, \quad \rho \propto (t_0(r) - t)^{-2} \tag{3.61}$$

となる．

3.5 球対称定常時空とトールマン-オッペンハイマー-ボルコフ方程式

星の重力収縮のような動的現象を記述する際には，運動方程式にしたがって時間発展を追うことが本質的である．一方，星の平衡状態のように時間変化しない定常解を求める場合は，時間微分の項をすべて 0 とおけばよい[8]．

球対称定常時空を記述するには，(3.46)∼(3.50) 式で時間に依存する項を定数に置き換えればよい．さらに $\chi(r,t)$ を r と選ぶのが便利である (3.1 節参照)．つまり，時間に依存しない球対称時空の計量として

---

[8] 物理的には厳密な意味での定常解は存在しない．現実的には，念頭にある時間スケールに対して，それを変化させる物理過程の典型的時間スケールが十分長い場合，この定常解が良い近似となる．

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{3.62}$$

を採用する．この場合，(3.46) 式は

$$\frac{1}{\rho+p}\left(1-2\frac{Gm}{r}\right)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Gm}{r^2} + 4\pi Gpr = 0$$

$$\Longrightarrow -r^2\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{G(\rho+p)(m+4\pi pr^3)}{1-2Gm/r} \tag{3.63}$$

となる．これをトールマン-オッペンハイマー-ボルコフ (TOV) 方程式とよぶ．右辺の各項の比を考えると

$$\frac{p}{\rho} \approx \frac{c_s^2}{c^2}, \quad \frac{4\pi pr^3}{m} \approx \frac{3p}{\rho} \approx 3\frac{c_s^2}{c^2}, \quad \frac{2Gm}{r} \approx 4\times 10^{-6}\left(\frac{m}{M_\odot}\right)\left(\frac{R_\odot}{r}\right) \tag{3.64}$$

なので，音速 $c_{\rm s}$ が光速 c よりも十分小さく，かつ $r \gg 2Gm$ の場合には，(3.63) 式は非相対論的流体の静水圧平衡の式

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{G\rho m}{r^2} \tag{3.65}$$

に帰着する．

TOV 方程式は ρ, p, m の 3 つの未知関数を持つから，

$$m(r) = \int_0^r 4\pi x^2\rho\, dx \tag{3.66}$$

と状態方程式 $p = p(\rho)$ とを連立させれば解くことができる．(3.66) 式は，境界条件として中心に特異点がない ($r = 0$ で $m = 0$) ことを仮定している．

TOV 方程式の標準的な解き方は以下の通りである．

(i) 中心密度を与える： 中心密度 $\rho(0)$ から出発して，内側から外側へ (3.63) 式と (3.66) 式を連立して解いていく．

(ii) 天体の表面の定義・ (3.63) 式より，圧力は r に関して単調減少関数であることがわかる．$p = 0$ となる $r = R_{\rm s}$ を天体の表面と定義し，そこで計算をやめる．このとき，$m_{\rm s} \equiv m(R_{\rm s})$ が天体の全質量となる．

(iii) 計量の rr 成分： (3.40) 式より，

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1-2Gm/r} \tag{3.67}$$

で与えられる．

(iv) 計量の tt 成分： (3.49) 式に (3.63) 式を代入すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{\rho+p}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{G(m+4\pi pr^3)}{r^2-2Gmr}. \tag{3.68}$$

この方程式を $r \longrightarrow \infty$ でミンコフスキー時空に漸近する ($e^\phi = 1$) という境界条件のもとで積分すると

$$\phi(r) = \int_\infty^r \frac{G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}\,dx$$
$$\Longrightarrow e^{2\phi} = \exp\left(-\int_r^\infty \frac{2G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}\,dx\right) \tag{3.69}$$

となる.

天体が有限の半径 R_s を持つ場合を考えてみよう[9]. $r > R_\mathrm{s}$ では $p = 0$ なので, (3.69) 式は

$$2\phi(r) = \int_\infty^r \frac{2Gm_\mathrm{s}}{x(x-2Gm_\mathrm{s})}dx = \int_\infty^r \left(\frac{1}{x-2Gm_\mathrm{s}} - \frac{1}{x}\right)$$
$$= \ln \frac{x-2Gm_\mathrm{s}}{x}\bigg|_\infty^r = \ln\left(1-\frac{2Gm_\mathrm{s}}{r}\right)$$
$$\Longrightarrow e^{2\phi} = 1-\frac{2Gm_\mathrm{s}}{r} \quad (r > R_\mathrm{s}) \tag{3.70}$$

となり，シュワルツシルド解に一致する．一方，$r < R_\mathrm{s}$ の場合，(3.69) 式は

$$e^{2\phi} = \exp\left(-\int_{R_\mathrm{s}}^\infty \frac{2Gm_\mathrm{s}}{x(x-2Gm_\mathrm{s})}\,dx - \int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{2G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}\,dx\right)$$
$$= \left(1-\frac{2Gm_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}\right)\exp\left(-\int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{2G(m+4\pi px^3)}{x^2-2Gmx}\,dx\right)$$
$$= \left(1-\frac{2Gm_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}\right)\exp\left(-2\int_0^p \frac{dp}{\rho+p}\right) \tag{3.71}$$

とも書ける．最後の変形には (3.68) 式を用いた.

3.6 シュワルツシルド解

トールマン-オッペンハイマー-ボルコフ (TOV) 方程式：

---

[9] 下添字 s がいろいろ出てきて混乱したかもしれない．R_s と m_s は星の表面 (surface) での半径と質量という意味，c_s は音速 (sound velocity)．R_s はシュワルツシルド半径 r_s ($\equiv 2Gm/c^2$) ではないことに注意.

$$-r^2\frac{dp}{dr} = \frac{G(\rho+p)(m+4\pi pr^3)}{1-2Gm/r} \tag{3.72}$$

の一様密度解：

$$\rho(r) = \rho_0 \quad (= \text{定数}) \tag{3.73}$$

を具体的に計算してみよう．

質量 m は

$$m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \tag{3.74}$$

なので，(3.72) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
&-r^2\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi G(\rho_0+p)(\rho_0 r^3/3+pr^3)}{1-8\pi G\rho_0 r^2/3} \\
&\Longrightarrow -\frac{1}{(p+\rho_0)(p+\rho_0/3)}\frac{dp}{dr} = \frac{4\pi Gr}{1-8\pi G\rho_0 r^2/3} = -\frac{12\pi Gr}{8\pi G\rho_0}\frac{1}{r^2-1/\kappa_0^2} \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{p+\rho_0} - \frac{1}{p+\rho_0/3}\right)\frac{3}{2\rho_0}\frac{dp}{dr} = -\frac{3}{4\rho_0}\left(\frac{1}{r-1/\kappa_0}+\frac{1}{r+1/\kappa_0}\right) \\
&\Longrightarrow \frac{p+\rho_0}{p+\rho_0/3} \propto \sqrt{\left|\frac{1}{r^2-1/\kappa_0^2}\right|}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

ただし，$\kappa_0 \equiv \sqrt{8\pi G\rho_0/3}$ と定義した．

3.6.1　シュワルツシルドの内部解

$r = R_{\rm s}$ で $p = 0$ を境界条件として採用することで (3.75) 式の係数が決まる．まず $r < R_{\rm s}$ での $p(r)$ の表式を求めてみよう．(3.75) 式の左辺は $p = 0$ で 3 となるから，

$$\frac{p+\rho_0}{p+\rho_0/3} = 1 + \frac{2\rho_0}{3}\frac{1}{p+\rho_0/3} = 3\sqrt{\frac{1-\kappa_0^2R_{\rm s}^2}{1-\kappa_0^2r^2}} \quad (r < R_{\rm s}). \tag{3.76}$$

これを p について解き直し，$m_{\rm s} \equiv 4\pi\rho_0 R_{\rm s}^3/3$ を用いてさらに変形すると

$$\begin{aligned}
p+\rho_0/3 &= \frac{2\rho_0}{3}\left(3\sqrt{\frac{1-\kappa_0^2R_{\rm s}^2}{1-\kappa_0^2r^2}}-1\right)^{-1} \\
&= \frac{2\rho_0}{3}\frac{\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}}{3\sqrt{1-\kappa_0^2R_{\rm s}^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}}.
\end{aligned} \tag{3.77}$$

したがって

$$p(r) = \rho_0\frac{\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2R_{\rm s}^2}}{3\sqrt{1-\kappa_0^2R_{\rm s}^2}-\sqrt{1-\kappa_0^2r^2}}$$

$$= \frac{3m_\mathrm{s}}{4\pi R_\mathrm{s}^3} \frac{\sqrt{1 - 2Gm_\mathrm{s}r^2/R_\mathrm{s}^3} - \sqrt{1 - 2Gm_\mathrm{s}/R_\mathrm{s}}}{3\sqrt{1 - 2Gm_\mathrm{s}/R_\mathrm{s}} - \sqrt{1 - 2Gm_\mathrm{s}r^2/R_\mathrm{s}^3}}. \tag{3.78}$$

(3.67) 式と (3.69) 式より (3.62) 式に対する計量は

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - 2Gm/r}, \quad e^{2\phi} = \exp\left(- \int_r^\infty \frac{2G(m + 4\pi p x^3)}{x^2 - 2Gmx}\, dx \right) \tag{3.79}$$

で与えられる．$r > R_\mathrm{s}$ で真空 ($p = 0$, $\rho = 0$) となるように境界条件を選び，この計量を具体的に計算すれば，一様密度球に対するシュワルツシルド解が得られる．

そこで $m = m(r)$ を代入すると

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - 2Gm/r} = \frac{1}{1 - 8\pi G\rho_0 r^2/3} = \frac{1}{1 - 2Gm_\mathrm{s}r^2/R_\mathrm{s}^3}. \tag{3.80}$$

また

$$\begin{aligned} -\phi &= \int_r^\infty \frac{G(m + 4\pi p x^3)}{x^2 - 2Gmx}\, dx \\ &= \int_{R_\mathrm{s}}^\infty \frac{Gm_\mathrm{s}}{x^2 - 2Gm_\mathrm{s}x}\, dx + \int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{4\pi G x^3 (p + \rho_0/3)}{x^2 - \kappa_0^2 x^4}\, dx. \end{aligned} \tag{3.81}$$

ここで右辺第 1 項は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_{R_\mathrm{s}}^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2Gm_\mathrm{s}} \right) dx &= -\frac{1}{2}\left[\ln \frac{x}{x - 2Gm_\mathrm{s}} \right]_{R_\mathrm{s}}^\infty \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}} \right). \end{aligned} \tag{3.82}$$

一方，$a \equiv \sqrt{1 - \kappa_0^2 R_\mathrm{s}^2}$, $u(x) \equiv \sqrt{1 - \kappa_0^2 x^2}$ とおいて第 2 項を変形すると

$$\begin{aligned} &\int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{4\pi G x}{1 - \kappa_0^2 x^2} \frac{2\rho_0}{3} \frac{\sqrt{1 - \kappa_0^2 x^2}}{3\sqrt{1 - \kappa_0^2 R_\mathrm{s}^2} - \sqrt{1 - \kappa_0^2 x^2}}\, dx \\ &= \int_r^{R_\mathrm{s}} \frac{\kappa_0^2 x}{1 - \kappa_0^2 x^2} \frac{\sqrt{1 - \kappa_0^2 x^2}}{3\sqrt{1 - \kappa_0^2 R_\mathrm{s}^2} - \sqrt{1 - \kappa_0^2 x^2}}\, dx = -\int_{u(r)}^a \frac{du}{3a - u} \\ &= -\ln \frac{3a - u(r)}{2a}. \end{aligned} \tag{3.83}$$

したがって

$$\begin{aligned} &2\phi = 2\ln a + 2\ln[3a - u(r)] - 2\ln(2a) = 2\ln \frac{3a - u(r)}{2} \\ &\Longrightarrow e^{2\phi} = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}} - \sqrt{1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}r^2}{R_\mathrm{s}^3}} \right)^2. \end{aligned} \tag{3.84}$$

これらをまとめれば，$r < R_{\rm s}$ でのシュワルツシルドの内部解の計量：

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{2Gm_{\rm s}}{R_{\rm s}}} - \sqrt{1-\frac{2Gm_{\rm s}r^2}{R_{\rm s}^3}}\right)^2 dt^2$$

$$+\left(1-\frac{2Gm_{\rm s}r^2}{R_{\rm s}^3}\right)^{-1} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{3.85}$$

を得る．

3.6.2 シュワルツシルドの外部解

一方，$r > R_{\rm s}$ では $p = 0, \rho = 0, m = m_{\rm s}$ であるから (3.67) 式より

$$e^{2\lambda} = \frac{1}{1 - 2Gm_{\rm s}/r}. \tag{3.86}$$

また，(3.69) 式より

$$-\phi = \int_r^\infty \frac{G(m + 4\pi p x^3)}{x^2 - 2Gmx} dx = \int_r^\infty \frac{Gm_{\rm s}}{x^2 - 2Gm_{\rm s}x} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2Gm_{\rm s}}{r}\right). \tag{3.87}$$

これらをまとめれば，$r > R_{\rm s}$ での計量：

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2Gm_{\rm s}}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2Gm_{\rm s}}{r}\right)^{-1}dr^2$$

$$+ r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{3.88}$$

を得る．これがいわゆるシュワルツシルド解であるが，(3.85) 式のシュワルツシルドの内部解と区別してシュワルツシルドの外部解と呼ぶことがある．また，この計量の値が発散する $r = r_{\rm s}$：

$$r_{\rm s} \equiv 2Gm_{\rm s} \quad \left(= \frac{2Gm_{\rm s}}{c^2}\right) \tag{3.89}$$

はシュワルツシルド半径と呼ばれる．

この計量で $M_{\rm s}$ が一定のまま $R_{\rm s} \longrightarrow 0$ としたものを，通常シュワルツシルド解と呼ぶことが多いかもしれない．その場合にはこの節の方法とは異なり，$r = 0$ に質量 $m_{\rm s}$ の質点がある以外，いたるところ真空であると仮定しても導かれる (3.8 節)．しかし上述の導出からわかるように，じつは $r > R_{\rm s}$ での計量は，$r < R_{\rm s}$ における質量分布の詳細とは無関係に $r = R_{\rm s}$ における内側の全質量 $m_{\rm s}$ だけで決まっている．このため，たとえば有限の半径をもつ太陽の外側の時空がシュワルツシルドの外部解で記述できるのである．通常の導出法ではこのあたりの事情がやや曖昧なままである．

シュワルツシルドの内部解は，一様密度というあまり現実的ではない仮定のもとでのみ正しい計量である．一方，シュワルツシルドの外部解は，天体の外側の物質の存在が近似的に無視できる限りかなり一般的に成り立つ結果である．これはニュートン力学の場合でも同じで，有限のサイズを持つ球対称物体が外側におよぼす重力場は，原点に同じ質量の質点をおいた場合と厳密に一致する．

3.6.3 シュワルツシルドの内部解の適用限界

$r < R_{\rm s}$ の場合，(3.78) 式より，圧力が正となるためには

$$1 - \frac{2Gm_{\rm s}r^2}{R_{\rm s}^3} > 1 - \frac{2Gm_{\rm s}}{R_{\rm s}} > 0, \tag{3.90}$$

$$3\sqrt{1 - \frac{2Gm_{\rm s}}{R_{\rm s}}} - \sqrt{1 - \frac{2Gm_{\rm s}r^2}{R_{\rm s}^3}} > 0 \tag{3.91}$$

という条件が必要である．(3.90) 式は

$$R_{\rm s} > r_{\rm S} = 2Gm_{\rm s}. \tag{3.92}$$

(3.91) 式は $r = 0$ のときに成り立てば常に成り立つから

$$3\sqrt{1 - \frac{2Gm_{\rm s}}{R_{\rm s}}} - 1 > 0 \Longrightarrow \frac{2Gm_{\rm s}}{R_{\rm s}} < \frac{8}{9} \Longrightarrow R_{\rm s} > \frac{9}{8}r_{\rm s} \tag{3.93}$$

であるから，後者が成り立てばよい．逆に言えば，

$$R_{\rm s} < \frac{9}{8}r_{\rm s} = \frac{9}{8}\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R_{\rm s}^3 \Longleftrightarrow R_{\rm s} > \frac{1}{\sqrt{3\pi G\rho_0}} \tag{3.94}$$

の場合には，圧力で重力を支える平衡状態を実現できないことになる．つまり，必然的に収縮するしかなくなるわけだ．

この式の右辺はもう少し物理的に解釈できる．ニュートン力学において，半径 r 内にある質量 $M(r) = 4\pi\rho_0 r^3/3$ の重力のもとで運動する粒子を考える．

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 r \tag{3.95}$$

より，この粒子の力学的時間スケール $\tau_{\rm dyn}$ は r には依存せず

$$\tau_{\rm dyn} \approx \sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho_0}} \tag{3.96}$$

で与えられる．したがって数係数の違いを無視すれば，(3.94) 式は，球の表面の半径 $R_{\rm s}$ は $\tau_{\rm dyn}$ の時間内では光が到達できない距離であることを示す ($c = 1$ としていることに注意)．つまりこの条件が満たされている場合，$R_{\rm s}$ の領域がいったん重力収縮を開

始すると，因果的に球内部の圧力を上昇させることで重力収縮をとめることはもはや不可能なのである．

3.7 重力質量と固有質量

さてここまでの議論では，(3.66) 式で定義された量

$$m(r) = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x)\, dx \tag{3.97}$$

をあたりまえのように「質量」の定義とみなしてきた．しかし，(3.62) 式の計量に対する 3 次元空間部分の固有体積要素は $r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$ ではなく，

$$d^3r_p = \sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}\, drd\theta d\varphi = r^2 e^\lambda \sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$\Longrightarrow dV_p = dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}} = 4\pi r^2 e^\lambda\, dr \tag{3.98}$$

とすべきである．球対称の場合，全空間で積分する際には d^3r_p を角度平均した dV_p を固有体積要素として用いればよい．したがって，

$$M_p(r) = \int_0^r \rho\, dV_p = \int_0^r 4\pi x^2 \rho(x) e^\lambda\, dx = \int_0^r \frac{4\pi x^2 \rho(x)}{\sqrt{1 - 2Gm/x}}\, dx \tag{3.99}$$

を，この系の「質量」と定義する方が自然に思われる．

エネルギー密度 ρ を，物体の静止質量密度の項 ρ_m と，それ以外の運動エネルギーあるいは相互作用エネルギーなどの寄与の項 ρ_I：

$$\rho = \rho_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{I} \tag{3.100}$$

に分離したとすれば，

$$m(r) = \int_0^r (\rho_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{I}) \sqrt{1 - \frac{2Gm}{x}}\, dV_p. \tag{3.101}$$

ニュートン理論では $2Gm/x \ll 1$, $\rho_\mathrm{I} \ll \rho_\mathrm{m}$ であるから，

$$\begin{aligned} m(r) &= \int_0^r (\rho_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{I}) \sqrt{1 - \frac{2Gm}{x}}\, dV_p \approx \int_0^r (\rho_\mathrm{m} + \rho_\mathrm{I}) \left(1 - \frac{Gm}{x}\right) dV_p \\ &\approx \underbrace{\int_0^r \rho_\mathrm{m}\, dV_p}_{=M_\mathrm{m}} + \underbrace{\int_0^r \rho_\mathrm{I}\, dV_p}_{=U_\mathrm{I}} - \underbrace{\int_0^r \frac{Gm\rho_\mathrm{m}}{x}\, dV_p}_{=U_\mathrm{G}}. \end{aligned} \tag{3.102}$$

同様にすれば，$M_p \approx M_\mathrm{m} + U_\mathrm{I}$ であるから，一般的には

$$M_p > M_\mathrm{m} \tag{3.103}$$

となる．M_p と M_{m} の差が相互作用のエネルギーの寄与，M_{p} と m の差が重力エネルギーの寄与である．このため，M_p を固有質量，M_{m} を固有静止質量，m を重力質量と呼んで区別することがある．つまり，重力が強くなると (密度が高くなると)，重力エネルギー，さらには内部エネルギーが天体の質量に大きく寄与するようになるのである．

3.8 球対称真空解とバーコフの定理

すでに 3.1 節で述べたように，球対称時空の線素は一般に (3.4) 式，すなわち

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}\,dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}\,dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2\right) \tag{3.104}$$

と置くことができる．特に物質が存在しない場合 (真空) には，時間に依存した時空を考えたとしても物質の静止系という概念にはもはや意味がない．つまり (3.6) 式のように $\chi(r,t)$ と r を区別する理由はなくなり，$\chi = r$ とした (3.104) 式を用いてよいことになる．

この場合，$\dot{\chi} = \ddot{\chi} = \chi'' = 0,\ \chi' = 1$ が成り立つから，これらをまず (3.12) 式に代入すれば

$$\frac{e^{-2\phi}}{r}\dot{\lambda} = 0 \Longrightarrow \dot{\lambda} = 0 \tag{3.105}$$

となる．この結果も合わせて，(3.11) 式，(3.13) 式，および (3.14) 式に代入すると

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right)e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{3.106}$$

$$\left(\frac{2\phi'}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 0, \tag{3.107}$$

$$\left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \frac{\phi'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right)e^{-2\lambda} = 0 \tag{3.108}$$

が得られる．この方程式系には時間微分が含まれていないことからもわかるように，球対称真空時空は必ず静的 (計量が時間に依存しない) となる．ある半径以内の有限な領域に物質が存在している場合であっても，上述の方程式はその半径以上の領域では同様に成立することに注意してほしい．

(3.106) 式 ~(3.108) 式は球対称定常時空であるから，それを解いた結果は 3.6.2 節で求めたシュワルツシルドの外部解に一致するはずだ．実際にこのことは，以下のようにして示される．

まず (3.106) 式と (3.107) 式より

$$\lambda' + \phi' = 0 \Longrightarrow \lambda + \phi = C_1 \ (= \text{定数}) \tag{3.109}$$

となる．ここで $r \longrightarrow \infty$ でミンコフスキー時空に漸近するという境界条件を選べば $C_1 = 0$ となる．また (3.106) 式より

$$(1 - 2r\lambda')e^{-2\lambda} = \frac{d}{dr}(re^{-2\lambda}) = 1 \Longrightarrow e^{-2\lambda} = 1 + \frac{C_2}{r} \tag{3.110}$$

が成り立つ．ここで C_2 は積分定数であるが，3.6.2 節の議論より，遠方から見たときに中心領域にある全質量 m_s を用いて $C_2 = -2Gm_\mathrm{s}$ と置くことができる．さらに (3.110) 式の最初の表式を再度 r について微分すれば

$$(-2\lambda' + 2r\lambda'^2 - r\lambda'')e^{-2\lambda} = 0 \tag{3.111}$$

が得られるが，これは (3.108) 式において $\phi = -\lambda$ とした結果と一致する．

以上より，(3.106) 式 ∼ (3.108) 式の解は (3.88) 式：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm_\mathrm{s}}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \tag{3.112}$$

で与えられることが示された．このように球対称分布にしたがう物質が動径方向に運動をしていたとしても，その外側の真空時空はシュワルツシルドの外部解で与えられる．この結果はバーコフ (Birkhoff) の定理と呼ばれている．

3.9　一様等方宇宙モデル：フリードマン-ロバートソン-ウォーカー解

3.9.1　宇宙原理とロバートソン-ウォーカー計量

ここまでは大局的な宇宙全体ではなく，ある特別な点を原点に選びその回りの時空を球対称であると近似した場合の議論であった．宇宙が空間的に一様等方[10]であるとするならば，そのなかの任意の点を原点としてもやはりこの球対称性が成り立つはずである．そこで，この章の球対称時空の特別な例として宇宙そのものを取り上げてみよう．

もちろんこの宇宙の空間的一様等方性もあくまで近似的なものでしかない．地球があり太陽があること自体，そこが宇宙の他の場所と違っていることを示す．したがってこ

---

[10] ある方向に平行移動しても変化が起こらない場合，その方向に対して空間は一様であるという．ある点の回りに空間を回転させても変化しない場合，空間はその点の回りで等方であるという．並進対称性，回転対称性と言ってもよい．宇宙の過去と未来は明らかに異なるから，(我々の) 宇宙は時間の並進に対しては対称ではない．厳密な意味での時間の並進対称性を持つ宇宙は進化しない静的な宇宙である．

の一様等方性はあくまで十分大きなスケールで平均して初めて成り立つものと考えられているに過ぎない．これを「宇宙原理」と呼ぶ[11]．この「宇宙原理」を認めることで，宇宙の大局的な計量の形をかなり絞りこめる．

まず (3.6) 式と同様にして

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$\Big\Downarrow \quad \text{宇宙原理にしたがって任意の点のまわりで球対称}$$

$$ds^2 = g_{tt}(t,r)\, dt^2 + g_{rr}(t,r)\, dr^2 + g_{\theta\theta}(t,r)\, (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{3.113}$$

と書くことができる．さらに宇宙の一様等方性を要請すれば，この計量が

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \big[W(x)\, dx^2 + x^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \big] \tag{3.114}$$

の形になることがわかる．計量が時間だけの関数と空間だけの関数に変数分離した形になる理由は，そうでなければ時間がたつと場所ごとの計量がずれてしまい，一様等方性が破れてしまうためである．その上で，今までと同様に球の表面積が $4\pi x^2$ となるような動径座標として x を導入した．

最後に，$g_{tt} = -1$ と選ぶことは，この座標系に対して相対的に静止している (共に動いているという意味で共動系といわれる) 観測者の固有時間を座標時間と選ぶことに対応していることを注意しておく．じつは，任意の時空に対して

$$ds^2 = -dt^2 + \gamma_{ij}\, dx^i dx^j \tag{3.115}$$

という形の計量をもつような座標系 (同期化された座標系) を設定することは常に可能である[12]．直感的には，ある空間的超曲面 S_1 を準備して，その面上の各点の法線を時間軸 t とする．その軸に沿って，Δt だけ進んだところを次の超曲面 S_2 とする $\cdots$ という作業を進めていけば座標系が構築できるはずである．しかし，この場合一般には法線がいずれ交わってしまい，座標の選び方に起因する見かけ上の (非物理的な) 特異点が生まれてしまう．空間が一様等方性を持つ場合にはこのようなことが起こらないので，この同期化された座標系を常に使い続けることができる．

さて例題 D.11 で示してあるように，一般の球対称時空の計量：

---

[11] 原理というからには厳密に証明されているわけではなく，あくまでそれを信じて先に進めという意味に理解すべきである．その結果どうしても解消できない矛盾が発見されて初めて，それが降格され，別の新しい原理にとってかわられることになる．

[12] たとえば，ランダウ-リフシッツ『場の古典論』§97 参照．

$$ds^2 = -e^{2\phi(x,t)}dt^2 + e^{2\lambda(x,t)}dx^2 + \chi^2(x,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{3.116}$$

に対するリッチスカラー R は

$$\begin{aligned}R = {} & 2\left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\phi}\dot{\lambda} - \frac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \frac{2\ddot{\chi}}{\chi} + \frac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi} + \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi} \\ & + 2\left(-\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi} - \frac{2\chi'\phi'}{\chi} - \frac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda} \\ & + \frac{2}{\chi^2}\end{aligned} \tag{3.117}$$

となる．(3.114) 式の計量に対しては

$$\phi(x,t) \equiv 0, \quad \lambda(x,t) = \ln a(t) + \frac{1}{2}\ln W(x), \quad \chi(x,t) = a(t)x \tag{3.118}$$

であるから，(3.117) 式は

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left[\frac{2W'}{xW^2} + \frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{1}{W}\right)\right] \tag{3.119}$$

となる．一様等方という仮定のもとでは，最後の項が場所の関数であっては困るので，

$$\frac{2W'}{xW^2} + \frac{2}{x^2}\left(1 - \frac{1}{W}\right) \equiv 6K \quad (K\text{ は定数}) \tag{3.120}$$

とおいて $W(x)$ を求めると，

$$W(x) = \frac{1}{1 - Kx^2} \tag{3.121}$$

となる．したがって，一様等方宇宙モデルは，ロバートソン-ウォーカー (Robertson-Walker) 計量と呼ばれる次の形：

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[\frac{dx^2}{1 - Kx^2} + x^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\right] \tag{3.122}$$

で記述されることになる．

3.9.2　アインシュタイン方程式からフリードマン方程式へ

次にやりたいのは，(3.122) 式のなかで，宇宙膨張を記述する $a(t)$ の時間発展方程式を求めることである．そのためには，アインシュタイン方程式の右辺に登場する物質場のエネルギー運動量テンソルを指定する必要がある．じつは，空間の一様等方性の仮定のもとでは，物質場のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は次の完全流体の形：

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p\,g_{\mu\nu} \tag{3.123}$$

しか許されないことが示される[13]．

ここではアインシュタイン方程式として (2.135) 式ではなく，宇宙定数 Λ を含む (2.136) 式：

$$G^{\alpha}{}_{\beta} + \Lambda\delta^{\alpha}{}_{\beta} = 8\pi G\, T^{\alpha}{}_{\beta} \tag{3.124}$$

を採用する．後述のように，宇宙の大局的進化を議論する上では宇宙定数の寄与が無視できないと考えられている[14]．

(3.122) 式で与えられるロバートソン-ウォーカー計量は，一般的な球対称計量である (3.6) 式において

$$\phi(x,t) \equiv 0, \quad \lambda(x,t) = \ln a(t) - \frac{1}{2}\ln(1-Kx^2), \quad \chi(x,t) = a(t)x \tag{3.125}$$

とおいたものとなっている．

これらを (3.26) 式 ∼(3.29) 式に代入して両辺に a^2x^2 をかければ，(3.124) 式が具体的に以下のように書き下せる．

$$-3\dot{a}^2x^2 - 3Kx^2 - \Lambda a^2x^2 = -8\pi G\rho a^2x^2, \tag{3.126}$$

$$\frac{\dot{a}}{a}a - \dot{a} = 0, \tag{3.127}$$

$$-Kx^2 - 2a\ddot{a}x^2 - \dot{a}^2x^2 - \Lambda a^2x^2 = 8\pi Gpa^2x^2, \tag{3.128}$$

$$-2a\ddot{a}x^2 - \dot{a}^2x^2 - Kx^2 - \Lambda a^2x^2 = 8\pi Gpa^2x^2. \tag{3.129}$$

(3.127) 式は自明な式であり，また (3.128) 式と (3.129) 式は同じ式である．したがって，(3.126) 式と (3.128) 式を組み合わせて次の 2 つの独立な式：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \tag{3.130}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \tag{3.131}$$

を得る．

特に，(3.130) 式は，宇宙膨張を記述するフリードマン方程式と呼ばれている．また，(3.131) 式を書き換えると

$$\ddot{a} = -\frac{G}{a^2}\underbrace{\frac{4\pi}{3}\left(\rho + 3p - \frac{\Lambda}{4\pi G}\right)a^3}_{\text{半径 } a \text{ の一様密度球の質量}} \tag{3.132}$$

---

13) 『入門』問題 [6.6] 参照．

14) ただし，小さなスケールの領域を考える限り宇宙定数の存在は無視できる．

となる．(3.132) 式は半径 a の球殻上の粒子のニュートン力学による運動方程式 ((3.95) 式) と (ほぼ) 一致する．右辺第 1 項が通常の質量の寄与に対応．第 2 項は，圧力があると一般相対論では実効的に重力が増すことを示す．さらに最後の項を見れば，正の宇宙項は実効的には負の重力として寄与することを示す．これがまさに,「宇宙定数は万有斥力の役割をする」と言われている理由である．このことから，$p=0$ の物質に限れば，一般相対論を用いずともニュートン力学だけで，厳密に正しい宇宙膨張の方程式を導くことができることがわかる．この解釈にしたがうと，(3.130) 式の K は，(3.131) 式を積分したときの積分定数にほかならない[15)]．

また (3.130) 式と (3.131) 式を少しにらめば，

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.133}$$

と定義し，$\rho \longrightarrow \rho + \rho_\Lambda$, $p \longrightarrow p + p_\Lambda$ と置き換えてやることで，Λ の寄与はすべてエネルギー運動量テンソルに吸収できる．つまり，負の圧力をもつ物質の存在を認めれば，本来，時空に付随した幾何学的量であったはずの宇宙定数を，何らかの物質場による寄与と再解釈できることになる．

ところで，(3.130) 式を時間に関して微分すると，

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho\right) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{3.134}$$

これと (3.131) 式を等置すると，

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{3.135}$$

これは，物質のエネルギー密度の進化を記述する式である．もちろんこれは，直接ビアンキの恒等式 (エネルギー運動量保存則 ${T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$) からも導ける．この式は，時間に関して 1 階微分のみで書かれているため，一様等方宇宙の力学を記述する独立な 2 つの方程式として，(3.130) 式と (3.131) 式ではなく，(3.130) 式と (3.135) 式を選ぶことが普通である．

ただこのままでは，3 つの時間の関数 a, ρ, p (2 つの定数，K, Λ は解のパラメータ) に対して 2 つしか方程式がないため，もう 1 つ独立な方程式が必要となる．そのため，圧力と密度の関係を決める状態方程式 $p = p(\rho)$ を持ち出す必要がある．

---

15) $-K/2$ が粒子のもつ全エネルギーに対応する．このことは $\rho \propto a^{-3}$ を仮定して，(3.130) 式を時間に関して微分すれば (3.131) 式で $p=0$ とした結果が得られることから確かめられる．3.9.3 節の (i) で説明するように，圧力が 0 であることと密度の時間変化がスケール因子の 3 乗に逆比例することは同値である．

3.9.3 宇宙の状態方程式

状態方程式は考えている物質の性質に依ってはいくらでも複雑になり得るが，代表的なものとして以下の 4 つをあげておこう．

(i) 非相対論的物質 (matter)： $p \ll \rho$

粒子の生成・消滅はないものとすると，半径 a の球内の粒子数は不変なので粒子の個数密度を $n(t)$ とすれば

$$N = \frac{4\pi}{3} n(t) a(t)^3 = 一定 \Longrightarrow n(t) \propto a(t)^{-3}. \tag{3.136}$$

したがって，質量 m, 運動量 q を持つ非相対論的粒子に対するエネルギー密度は

$$\rho_{\mathrm{m}}(t)c^2 = \sqrt{(mc^2)^2 + (qc)^2}\, n(t) = \left(mc^2 + \frac{q^2}{2m} + \cdots\right) n(t)$$

$$\longrightarrow \rho_{\mathrm{m}}(t) \sim m\, n(t) \propto a(t)^{-3} \tag{3.137}$$

バリオン (baryon)，ダークマター (dark matter) などがこれにあたる．これは状態方程式 $p = 0$ の場合に対応しており，実際 (3.135) 式に $p = 0$ を代入して積分すれば $\rho \propto a^{-3}$ が得られる．

(ii) 相対論的物質 (radiation)： $p = \rho/3$

粒子の生成・消滅がなければ，相対論的粒子の場合でも (3.136) 式はおなじく成立する．一方，相対論的粒子の (平均) 運動量は

$$q(t) \propto \frac{\hbar}{波長} \propto \frac{1}{a(t)} \tag{3.138}$$

となるので，

$$\rho_{\mathrm{r}}(t) \sim q(t), \quad n(t) \propto a(t)^{-4}. \tag{3.139}$$

このような物質の代表例は光子 (宇宙背景輻射) であるが，質量をもつ粒子であってもその質量が宇宙の温度に比べて十分無視できる時期 ($k_{\mathrm{B}}T(t) \gg mc^2$) には，(3.139) 式に従う．相対論的物質の状態方程式が $p = \rho/3$ となることは分布関数から導くことができ，これを (3.135) 式に代入して積分すればもちろん $\rho \propto a^{-4}$ が得られる．

(iii) 宇宙定数 (cosmological constant)： $p = -\rho$

(3.133) 式は，アインシュタイン方程式の左辺に現れる (すなわち，時空自身がもつ幾何学的性質) 宇宙定数を，むりやり物質場とみなすと，$p = -\rho$ という状態方程式に従うことを示す．もともとアインシュタイン方程式の左辺に付け加える自由度としては，Λ は定数しか許されないのであるが，これも $p = -\rho$ を (3.135) 式に代入した結果と一致する．

(iv) ダークエネルギー (dark energy)： $p = w\rho$

最近では，この「宇宙定数」は,「真空自身のもつエネルギー密度」であると解釈されることのほうが多い．このように,「宇宙定数」をアインシュタイン方程式の左辺から右辺に移す，言い換えれば，物理法則ではなくその中に存在する物質の一部と見なすことにした途端，もはやそれは「定数」である必然性が失われてしまう．そこで，少し一般化して，

$$p_{\rm X} = w\rho_{\rm X} \tag{3.140}$$

(ただし w は定数) という状態方程式に従う物質を考えてみることにする．また，宇宙の全物質は，非相対論的物質 $\rho_{\rm m}$ と $\rho_{\rm X}$ の 2 成分からなるとする．この 2 成分が互いに移り変わらないものとすれば，(3.135) 式より，

$$\dot{\rho}_{\rm X} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho_{\rm X} \longrightarrow \rho_{\rm X} \propto a(t)^{-3(1+w)}. \tag{3.141}$$

これは，$w = 1/3$, $w = 0$, $w = -1$ の場合，それぞれ，相対論的物質 (輻射)，非相対論的物質，宇宙定数，に帰着する．このような事情もあり，一般的に $w < -1/3$ のような状態方程式を持つ存在を仮定して，ダークエネルギー (dark energy) と呼ぶことが一般的になりつつある (例題 F 参照)[16]．

3.9.4 宇宙の加速膨張の発見

宇宙は現在膨張している．この事実は 1929 年，エドウィン・ハッブルによって観測的に発見された．その結果，宇宙には始まりも終わりもなく常に同じ状態のまま永遠に存在し続けるとする「静的」宇宙観は破棄され，進化する「動的」宇宙観が市民権を得た．その約 70 年後の 1998 年，遠方の超新星を用いた観測によってこの膨張は加速していることが示された．この結果は，米国の科学雑誌 *Science* によって 1998 年のブレイクスルーに選ばれている．

これらをあえて正確とは言えない表現で説明すれば，以下のようになる．時刻 t における宇宙の「半径」を $a(t)$ としよう[17]．現在の時刻 $t = t_0$ において，時間に関してテイラー展開すれば，

$$a(t) = a(t_0) + \left.\frac{da}{dt}\right|_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2a}{dt^2}\right|_0 (t - t_0)^2 + \cdots \tag{3.142}$$

---

16) これは (i) で取り上げたダークマターと似た名前ではあるがまったく異なる成分である．とはいってもその正体はまだ謎のままである．

17) もちろんこれが通常の意味での「半径」ではないことはすでに繰り返し強調してある．

となる．この右辺の項は順に，現在の宇宙のサイズ，速度，加速度に対応する．しかしじつはそれらの値はわからない．というか，宇宙は無限にひろがっていると考えられており，$a(t)$ およびそれらの微係数の値自身は定義できない (あるいは意味がない) と言うべきなのである．一方，それらを組み合わせて得られる

$$H_0 \equiv \frac{1}{a(t_0)} \left.\frac{da}{dt}\right|_0, \tag{3.143}$$

$$q_0 \equiv -\frac{1}{a(t_0)H_0^2} \left.\frac{d^2a}{dt^2}\right|_0 \tag{3.144}$$

は観測可能量であり，それぞれハッブル定数，減速パラメータと呼ばれる重要な宇宙論パラメータとして知られている．

$a(t)$ の時間変化を支配するのはもちろん重力である．その一階微分に対応する H_0 が正の値をとることがすなわち宇宙が膨張していることに対応する.「なぜ現在の宇宙が収縮ではなく膨張しているか」という疑問に答えることはきわめて難しいが，これは初期条件に帰着すべき問題で，重力が働いていようと膨張していること自体は不思議ではない．一方，二階微分に対応する q_0 については事情が異なる．宇宙膨張の加速度は，通常の重力を考える限り初期条件には無関係に負の値をとるはずだ．だからこそ，q_0 は加速度にマイナスをつけて定義され，わざわざ「減速」パラメータと呼ばれているわけである．このことからも，q_0 が負の値をとるなどとはまったく予想されていなかったことがわかる．にもかかわらず最近の観測は,

$$q_0 \approx -0.6 \tag{3.145}$$

という負の値を示唆している．負の加速度として定義された減速パラメータが負の値をとっているから宇宙はじつは加速している，というなんだかややこしい事態になってしまっているわけである．そのせいもあり，現在では減速パラメータという量はほとんど使われなくなってしまった.

そもそも宇宙膨張は，遠方銀河までの距離 d (例題 G 参照) とその銀河と我々との相対的後退速度 v が比例関係：

$$v = H_0 d \tag{3.146}$$

にあるという観測事実 (ハッブルの法則) から導かれた．ただし，遠方といってもあくまで「ハッブルの時代において」であり，現代的な感覚からはきわめて近傍にある銀河というほうが適切である．ここでいう「相対的後退速度」とは，銀河の吸収線の波長のずれをドップラー効果：

$$\lambda_{\text{観測者}} = \lambda_{\text{実験室系}}(1 + v/c) \tag{3.147}$$

によって解釈して読み替えたものに他ならない．しかしこのような解釈に執着するかぎり，上式は $v \ll c$ の場合についてしか成り立たないように見える．その意味では，より本質的な観測量は赤方偏移と呼ばれる無次元パラメータ：

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{観測者}} - \lambda_{\text{実験室系}}}{\lambda_{\text{実験室系}}} \tag{3.148}$$

である.「赤方」というすでに偏見の入りこんだ名前になっているのは，遠方天体の波長が常に伸びる (赤くなる) 方向に偏移しているからであり，まさに宇宙が全体として膨張している事実に対応している[18)].

この場合，

$$\lambda_{\text{観測者}} = \lambda_{\text{実験室系}}(1 + z) \tag{3.149}$$

は常に成立する[19)]．一方，この z を $v = cz$ という関係式で速度に結びつけた際，$z > 1$ だと $v > c$ となり光速度を超えてしまい何かおかしいような気がする．これは宇宙論においてもっとも頻繁に聞かれる質問であるが，基本的には (3.147) 式のようなドップラー効果の帰結として理解する解釈が間違っていると言うべきであろう[20)]．つまり宇宙が膨張するというのは，光の波長もそれにつれて伸びるということであり，時刻 t の過去に発せられた天体からの光の波長を現在 $(t = t_0)$ 観測すれば

$$\lambda_{\text{観測者}} = \lambda_{\text{実験室系}} \frac{a(t_0)}{a(t)} \tag{3.150}$$

となるのである．つまり，赤方偏移は宇宙のスケールファクターと

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} \tag{3.151}$$

---

18) 我々の宇宙が収縮していたならば，(3.148) 式はマイナスをつけて定義された上で，青方偏移と呼ばれていたことであろう．

19) というかそもそも定義式そのものである．

20) よくなされる弁明に，この速度 v で実際に伝達される情報はないのでその場合 c を超えても因果律には矛盾しない，というものがある．それはそれで間違ってはいないのだが，情報を伝達しない速度とは何か，を説明するはめになる．それをかわすためにあみだされたと思われる有名なジョーク (?) を紹介しておこう.「現在出版されるすべての論文誌を出版されるたびに上に重ねて積み上げてみると，その先端部分の上昇速度は光速度を超えてしまい相対論に矛盾するのではないかという疑問が湧く．しかし，それは相対論には矛盾しない．なぜならば相対論と矛盾するのは情報が光速度を超えて伝わる場合であり，これらの論文は何一つ情報を持っていないからである」．物理学者がこのような自虐的な話で切りぬけざるを得ない状況を回避するためにも，(3.147) 式はドップラー効果として解釈すべきではない．

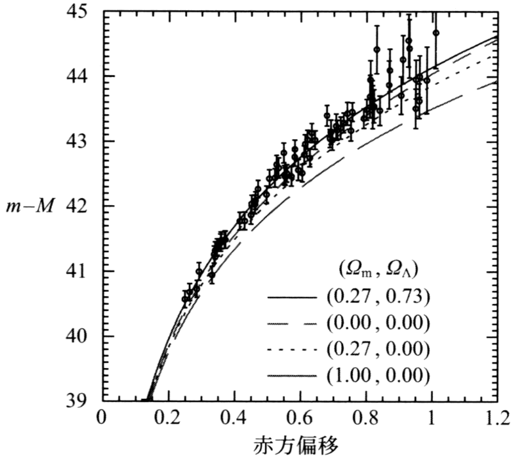


図 3.1 超新星レガシーサーベイに基づく赤方偏移–距離指標関係. $\Omega_{\rm m}$ と Ω_Λ は (3.154) 式で定義される密度パラメータと宇宙定数パラメータ.

という関係にあることが本質である. 便宜的に現在のスケールファクターを 1 と定義することが多いので, この関係式は

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} \tag{3.152}$$

と書かれることが普通である.

加速膨張という事実を明確にしたのは 1998 年の Ia 型超新星の観測結果で, 冒頭で紹介したブレイクスルーである. これは (3.146) 式で表される近傍宇宙におけるハッブルの法則をより遠方まで拡張したものと考えてよい. 超新星は星の進化の最終段階での爆発現象であり, そのスペクトルの性質から, Ia, Ib, Ic, II 型に分類される. 特に Ia 型超新星は連星系中の白色矮星が起こすものと考えられており, 明るさが最大となるときの絶対光度がほぼ一定で約 1 カ月もの長期間にわたりその母銀河と匹敵するほどの明るさを示す. したがって, きわめて遠方にある母銀河の距離を決定するための標準光源として有用である. 図 3.1 は, 超新星レガシーサーベイと呼ばれる 5 年プロジェクトの初年度のデータをまとめたものである. この間に観測された 71 個の Ia 型超新星の距離指標 (みかけの等級 m と絶対等級 M の差で, その天体までの距離に対応. 遠いほど値が大きくなる) とその母銀河の赤方偏移 (値が大きいほど遠方, すなわち過去に対応する) がある関係にしたがっていることが見てとれる. そこに描かれている 4 本の理論予想のうち, 一番下のカーブがアインシュタイン-ド・ジッターモデル ((3.130)

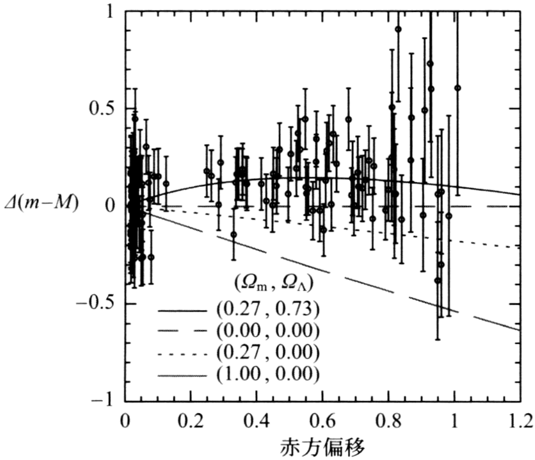


図 3.2　超新星レガシーサーベイに基づく赤方偏移–距離指標関係．図 3.1 を等速膨張の場合に $\Delta(m-M)=0$ となるように縦軸を変換したもの．

式で $p=K=\Lambda=0$ に対応し，減速膨張する) で，これとは完全にかけ離れている．一方，上から 2 番目のカーブは宇宙に物質が存在しない (したがって加速も減速もしない) 場合で，じつはデータはその結果にかなり近い．しかし，さらに精密な比較のために 2 番目のカーブとの残差をプロットしてみると，それに比べてデータは若干上側にあることがわかる (図 3.2)．つまり，遠方の超新星は 2 番目の曲線に対応する空っぽの宇宙モデルの予想よりも少しだけ暗い．これは，等速膨張をする場合よりも宇宙のサイズが大きいことを示唆しており，加速膨張を経験していることが結論されるわけだ．

加速膨張の解釈 I：宇宙定数

この加速膨張を生み出す原因はどう解釈すればよいのだろうか？ もっとも単純なのは，膨張を減速させる重力 = 万有引力に対抗して，宇宙膨張を加速させる「万有斥力」をもちこむことである．すでに (3.132) 式で示したように，一般相対論はこの万有斥力に対応する項の自由度を内在していることを思い出してほしい．アインシュタインはこの Λ の自由度を用いて，膨張も収縮もしない静的宇宙モデルを構築しようとした (1917 年)．この考え自体はまったくの失敗であったと言えるのだが，何と 80 年後に宇宙の加速膨張の担い手として表舞台にカムバックしたわけだ．宇宙が圧力の無視できる (非相対論的) 物質で満たされている場合には，(3.132) 式を

$$\frac{1}{aH_0^2}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{\Omega_\mathrm{m}}{2}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \tag{3.153}$$

と書き直すことができる．ここで，

$$\Omega_\mathrm{m} \equiv \frac{8\pi G\rho(t_0)}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{3.154}$$

は，現在の宇宙における (非相対論的) 物質密度と宇宙定数をそれぞれ無次元化したパラメータである．

(3.153) 式の意味は直感的には明らかである．普通の物質に対応する Ω_m の寄与は重力として宇宙膨張を減速させる．過去 (z が大きくなる方向) の宇宙はより高密度であるから，現在に比べて Ω_m が $(1+z)^3$ 倍された効果となる．一方，宇宙定数は名前の通りその大きさは時間とともに変化せず，常に Ω_Λ だけの万有斥力を及ぼし宇宙膨張を加速させる．現時点では，このように加速膨張を宇宙定数によって説明しようとする解釈がもっとも標準的である．この解釈にしたがって，超新星のデータや宇宙マイクロ波背景輻射データなどを組み合わせて推定された値は

$$\Omega_\mathrm{m} = 0.27 \pm 0.04, \quad \Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04 \tag{3.155}$$

となっている．図 3.1 および図 3.2 に描き入れられている実線は，上記の値を採用した場合で，確かに一致はよい．

この解釈に従えば，(3.153) 式から加速膨張は

$$z < \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_\mathrm{m}}\right)^{1/3} - 1 \tag{3.156}$$

の時期に限られ，過去では ($\Omega_\mathrm{m} = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$ の場合は $z > 0.75$) 減速膨張であるはずだ．残念ながら今のところこのような赤方偏移の観測データは限られており，かつ精度もあまりよくない (図 3.1, 3.2)．この領域の信頼性の高いデータの蓄積は宇宙定数による解釈のさらなる検証のために本質的である．

加速膨張の解釈 II：未知の重力法則

加速膨張に対するもう 1 つの解釈は，宇宙論的な大スケールで一般相対論が厳密には成り立たないとするものである．(3.132) 式が端的に示しているように，一般相対論に基づく宇宙膨張は本質的にはニュートンの逆二乗則にしたがっている．図 3.3 は，ニュートンの逆二乗則からのずれを湯川項で代表した重力ポテンシャル：

$$V(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right) \tag{3.157}$$

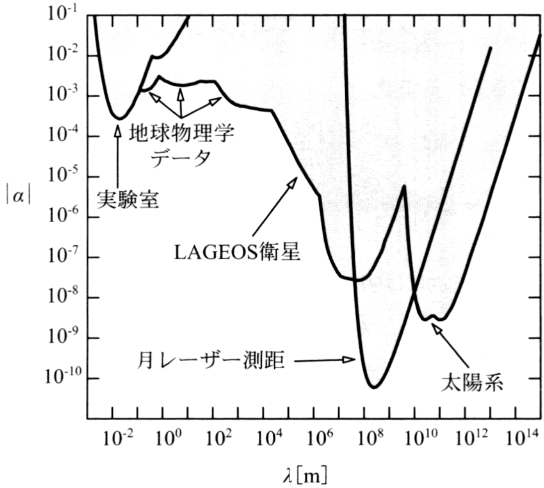


図 3.3　重力の逆二乗則からのずれに対する制限 (95%信頼度).

を仮定した場合，ずれのスケール λ とその振幅 α に対する実験・観測データからの制限をまとめたものである．このように，ニュートンの逆二乗則は，太陽系のサイズである 40AU ($\approx 6 \times 10^{12}$m) あたりまでは高い精度で検証されているものの，宇宙膨張が重要となってくる 1Mpc ($\approx 3 \times 10^{22}$m) 以上のスケールでは直接検証されてはいない．とすれば，加速膨張とは宇宙論的スケールでの一般相対論の限界を示しているのかもしれない．

この考え方はかなり大胆なものではあるが，そもそも一般相対論は古典論であり量子論的な補正が必然であること (ただしこれはミクロなスケールでの話である)，さらに最近の高次元宇宙モデルの可能性などを考慮すれば，ただちに否定できるようなものではない．というか，宇宙定数が実在するという考え方もそれと同等以上に大胆なものであることは認識しておくべきである．

3.9.5　ダークエネルギーに対する制限

再度 (3.132) 式を眺めてみる．じつはこの右辺の宇宙定数 Λ は，本来の一般相対論的思想から言えば左辺におくべきだった．この式のもととなるアインシュタイン方程式は，左辺が時空の幾何学に対応し右辺がそれを規定する物質場に対応する，という構造を持つ．宇宙定数は本来宇宙に実在する物質の一形態としてではなく，時空の幾何学的

性質のもつ自由度としての左辺に置くことを許されていただけの存在であった．しかしながら，現在では (3.132) 式のように宇宙定数を右辺に移行し，物質場として解釈するほうが普通である．この解釈のもとでは，(3.132) 式はむしろ

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi Ga}{3}\left[\rho + \rho_\Lambda + 3(p + p_\Lambda)\right], \tag{3.158}$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.159}$$

と書いた方がすっきりする．宇宙定数はエネルギー密度 ρ_Λ と圧力 p_Λ を持つ物質場に他ならないこと，ただしその場合，圧力が負になることが明確になる．ここまでくれば宇宙定数がきわめて特殊な例にしか過ぎないことが認識されてくる．当然，

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi Ga}{3}\left[\rho + \rho_\mathrm{X} + 3(p + p_\mathrm{X})\right] \tag{3.160}$$

と書き，状態方程式

$$p_\mathrm{X} = w\rho_\mathrm{X} \tag{3.161}$$

に従う「ダークエネルギー」へ一般化して考えたくなるはずだ．この文脈では宇宙定数は $w = -1$ というある特別な例にしか過ぎない．しかしながら，本来アインシュタイン方程式の左辺に導入された宇宙定数には，(3.161) 式のような自由度は許されず，その意味でも観測的に $w = -1$ かどうかを突き詰めることは重要な意義をもつ．

(3.161) 式で w が定数の場合には，ダークエネルギー密度は $\rho_\mathrm{X} \propto (1+z)^{3(w+1)}$ という時間依存性を持つことが示されるので，(3.153) 式は

$$\frac{1}{aH_0^2}\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{\Omega_\mathrm{m}}{2}(1+z)^3 - \frac{(1+3w)\Omega_\mathrm{X}}{2}(1+z)^{3(w+1)}, \tag{3.162}$$

と一般化される．したがって加速膨張の条件は

$$\Omega_\mathrm{m} + (1+3w)\Omega_\mathrm{X}(1+z)^{3w} < 0 \tag{3.163}$$

である．平坦な宇宙 $(\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{X} = 1)$ を仮定した場合，加速膨張の条件である (3.163) 式は $z = 0$ において

$$w < -\frac{1}{3(1-\Omega_\mathrm{m})} \tag{3.164}$$

に帰着する．現時点での観測データから w が -1 と矛盾する兆候は何もない．つまりダークエネルギーは実質的には宇宙定数に近いようだ．これもまた不思議なことである．

第4章

重力波

重力が弱いものとしてアインシュタイン方程式を近似すると，波動方程式に帰着する．この解が重力を伝える波動 — 重力波 — であり，その直接検出は 21 世紀の実験物理学における重要な目標の 1 つである．重力波の存在は，連星パルサー PSR B1913+16 の軌道要素変化の精密解析から間接的には証明されており，その発見者であるハルスとテイラーは 1993 年度ノーベル物理学賞を受賞した．一方，地上実験装置あるいは人工衛星を用いた重力波の直接検出は，一般相対論の検証にとどまらず，電磁波とは相補的な新しい宇宙観測手法を確立するという，さらに大きな科学的意義をもつ．

4.1 アインシュタイン方程式の弱場近似

まず電磁場を例として考えてみると，媒質 (= 容れ物) である時空 $ds^2 = \eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$ 中を，媒体 (= 波動) ともいうべきベクトルポテンシャル A^α が伝搬する，という構図である．一方，重力場の場合には，$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu$ 中を $g_{\mu\nu}$ が伝搬することになる．つまり標語的に言えば，媒質 = 媒体，すなわち伝えるものと伝わるものとが同じであり，それらをどう分離して考えるのかが自明でなくなってしまう．

歴史的には電磁波の存在が確定した後，電磁波を伝える媒質は何かという疑問から「エーテル」の存在が否定されるとともに光速度不変の原理が実験的に確定した．これがその後の特殊相対論の発見へとつながった．重力波についてはこれとは逆に，一般相対論から時空が媒質であること自体は自明である一方，その中を伝わるこの波動が実在するかについては，後述のエネルギー運動量擬テンソルがテンソルではないという問題に絡んで大論争があった．しかしその存在は，連星パルサーの軌道要素変化の精密解析から，間接的には確立しているといってよい．

そこで，以下ではこの分離が概念的に受け入れやすいような弱い重力場：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{4.1}$$

の場合に限定して考えることにする[1]．したがって，

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(\text{時空}) = \eta_{\mu\nu}&(\text{不変な媒質} = \text{容れ物}) \\ &+ h_{\mu\nu}(\text{変化する媒体} = \text{時空の波動}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

という描像が可能になる．

4.1.1 アインシュタイン方程式の線形化

$h_{\mu\nu}$ 自身は厳密な意味でのテンソルではないので，その添字の上げ下げの規則はまだ定義されていない．自然なのは，一般のテンソルと同じく $g_{\mu\nu}$ によって上げ下げをすることである．ただし，$h_{\mu\nu}$ が微小量である場合，その 1 次までをとる近似のもとでは，$\eta_{\mu\nu}$ を用いて上げ下げした結果と同じである．そこで弱場近似 ((4.1) 式) の下では，$h_{\mu\nu}$ およびその偏微分に対する足の上げ下げはすべて $\eta_{\mu\nu}$ を用いて行うものとする．また任意のテンソル A (添字は省略する) に対して，座標に対する偏微分を

$$\frac{\partial A}{\partial x^\alpha} \equiv A_{,\alpha}, \quad \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} \equiv A^{,\alpha}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \equiv A_{,\alpha\beta}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^\beta \partial x_\alpha} \equiv A^{,\alpha}{}_{\beta} \tag{4.3}$$

などと略記する[2]．A が $h_{\mu\nu}$ と同じ大きさ以下の微小量である場合には，それらの最低次では偏微分の足もまた $\eta_{\mu\nu}$ を用いて上げ下げできる．たとえば，$h_{\mu\nu}{}^{,\alpha} = \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu,\beta}$ である．

以上を念頭におき，アインシュタイン方程式を $h_{\mu\nu}$ に関して線形化[3]してみよう．まず，クリストッフェル記号は

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\mu}(h_{\mu\beta,\gamma} + h_{\mu\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma,\mu})$$

---

[1] (4.1) 式は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O(h^2)$$

の高次項を無視した近似式であるという立場と，

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

によって $h_{\mu\nu}$ を定義したものとする立場の 2 つがあり得る．事実上はこの両者でほとんど違いはないのであえて意識する必要はないが，理論的定式化においては解釈が異なる場合もある．たとえば，重力場のエネルギー運動量擬テンソルに関する 4.5 節を参照のこと．

[2] 座標に関する偏微分は可換であるから，これらの場合 $A_{,\alpha\beta} = A_{,\beta\alpha}$，$A^{,\alpha}{}_{\beta} = A_{,\beta}{}^{\alpha}$ などが成り立つ．

[3] $h_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項を無視して，$h_{\mu\nu}$ の 1 次の項までを残して書き下すこと．

$$\equiv \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\beta,\gamma} + h^{\alpha}{}_{\gamma,\beta} - h_{\beta\gamma}{}^{,\alpha}) \tag{4.4}$$

となる．同様にリッチテンソルを計算すると，

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha}}_{=O(h^2)}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[(h^{\alpha}{}_{\mu,\nu\alpha} + h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,}{}^{\alpha}{}_{\alpha}) - (h^{\alpha}{}_{\mu,\alpha\nu} + h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu})\right]$$

$$= \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu} - h_{\mu\nu,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} - h_{,\mu\nu}). \tag{4.5}$$

ここで，h は $h_{\mu\nu}$ のトレース：

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} \equiv \eta^{\alpha\mu}h_{\mu\alpha} \tag{4.6}$$

である．(4.5) 式を縮約するとリッチスカラーは

$$R = R^{\beta}{}_{\beta} \approx \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\beta,}{}^{\beta}{}_{\alpha} + h^{\beta}{}_{\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\beta} - h^{\beta}{}_{\beta,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} - h_{,}{}^{\beta}{}_{\beta})$$

$$= h_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta} \tag{4.7}$$

となる (脚注 2 (p.83) 参照)．

以上を組み合わせてアインシュタインテンソルを書き下す．まず，

$$2G_{\mu\nu} = 2R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R$$

$$\approx h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}). \tag{4.8}$$

ここで，

$$\overline{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{4.9}$$

を定義すると，

$$\overline{h} \equiv \overline{h}^{\mu}{}_{\mu} = h^{\mu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} \times 4h = -h, \tag{4.10}$$

$$h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h = \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}. \tag{4.11}$$

これを用いて (4.8) 式を書き直すと

$$2G_{\mu\nu} \approx -\overline{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\overline{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \overline{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu} + \overline{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu}$$

$$- \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}\overline{h}_{,\nu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\alpha}\overline{h}_{,\mu}{}^{\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}_{,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} + \overline{h}_{,\mu\nu}$$

$$- \eta_{\mu\nu}\left(-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\overline{h}^{,\alpha\beta} + \overline{h}_{,\beta}{}^{\beta}\right). \tag{4.12}$$

(4.12) 式の 2 行目と 3 行目の項を足し合わせると 0 になるので，残るのは 1 行目だけである．つまり，

$$2G_{\mu\nu} \approx -\overline{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\overline{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \overline{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu} + \overline{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu} \tag{4.13}$$

とまとめられる．さらに，座標系の選びかたの 4 自由度を用いて以下の座標条件 (ゲージ条件)：

$$\overline{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{4.14}$$

を採用する．具体的に $x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ とおくと (ただし $\xi^{\mu} \ll x^{\mu}$ とする)[4]，

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\ &\approx (\delta^{\alpha}{}_{\mu} - \xi^{\alpha}{}_{,\mu})(\delta^{\beta}{}_{\nu} - \xi^{\beta}{}_{,\nu})(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}).\end{aligned} \tag{4.15}$$

したがって，

$$\begin{aligned}&h'_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad h' \approx h - 2\xi_{\mu}{}^{,\mu} \\ &\Longrightarrow \overline{h'}_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{\beta}{}^{,\beta}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

これらより，

$$\overline{h'}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \overline{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \xi^{\mu,\alpha}{}_{\alpha} + \underbrace{\eta^{\mu\alpha}\xi_{\beta}{}^{,\beta}{}_{\alpha} - \xi^{\alpha,\mu}{}_{\alpha}}_{=0} \tag{4.17}$$

となるので，その右辺を 0 とするような ξ^{μ}：

$$\frac{\partial \overline{h}^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = \xi^{\mu,\alpha}{}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\xi^{\mu}{}_{,\beta\alpha} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\xi^{\mu} \equiv \Box\xi^{\mu} \tag{4.18}$$

を選べば，一般性を失うことなく

$$\overline{h'}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \tag{4.19}$$

すなわち，ゲージ条件 (4.14) 式を課せることがわかる．

4.1.2 線形化されたアインシュタイン方程式の波動解

結局，弱場近似の下でのアインシュタイン方程式は，波動方程式：

$$2G_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu} \Longrightarrow -\overline{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -\Box\overline{h}_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu} \tag{4.20}$$

に帰着する．その解は形式的に

$$\overline{h}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = \overline{h}^{(\mathrm{ret})}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) + \overline{h}^{(\mathrm{in})}_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}), \tag{4.21}$$

---

[4] ゲージ変換した結果については $h_{\mu'\nu'}$ ではなく $h'_{\mu\nu}$ という記法を使うことにする．

$$\overline{h}^{(\mathrm{ret})}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x}) = 4G\int \frac{T_{\mu\nu}(t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d^3x', \tag{4.22}$$

$$\Box\overline{h}^{(\mathrm{in})}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.23}$$

と書ける．

$\overline{h}^{(\mathrm{ret})}_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{x})$ は，時刻 t に空間座標 $\boldsymbol{x}$ においてソース項 $T_{\mu\nu}$ から受ける影響を表す．添字 ret は遅延解 (retarded) に対応することを示す．この表式を厳密に導くのはやや面倒だが，直感的には以下のようにして理解できる．まず，ニュートンの重力ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{x})$ が次のポアソン方程式：

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{4.24}$$

を満たすことから出発する．ここで $\rho(\boldsymbol{x})$ は座標 $\boldsymbol{x}$ における質量密度である．ところで，ニュートンの重力ポテンシャルは，座標 $\boldsymbol{x}'$ の場所における質量 (要素) に重力定数 G をかけ，そこまでの距離の逆数の重みをつけて足し合わせたものに等しい．これを積分型で書けば

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d^3x' \tag{4.25}$$

となる．負号は重力が引力であることに対応している．しかしこの式は，$\boldsymbol{x}'$ における影響が異なる地点 $\boldsymbol{x}$ に瞬時に伝わることを意味するが，それは因果律から考えてありえない．つまり，点 $\boldsymbol{x}$ の時刻 t における重力ポテンシャルの値は，時刻 $t-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|/c$ における点 $\boldsymbol{x}'$ の質量密度によって決まるはずだ．ここで，重力の影響は光速度で伝わることを仮定したが，じつはこれが波動方程式 (4.20) の意味するところである．

これらを踏まえて (4.24) 式の解が (4.25) 式であることと合わせて考えれば，(4.20) 式の解が係数も含めて (4.22) 式で与えられることが納得できよう．ただし，波動方程式 (4.20) には，ソース項によらず空間を光速度で伝搬する波動解 $\overline{h}^{(\mathrm{in})}_{\mu\nu}$ を付け加える自由度が残っている ((4.23) 式)．これが重力波にほかならない．

4.2 重力波の平面波解

真空中を伝搬する重力波：

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{4.26}$$

の単色平面波解：

$$\overline{h}_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}\exp\left(ik_\alpha x^\alpha\right) \tag{4.27}$$

を具体的に求めてみよう．ここで $a_{\mu\nu}$ は重力波の偏光テンソルと呼ばれ，その成分はすべて定数である．この $\overline{h}_{\mu\nu}$ は複素数であるが，電磁場 A^μ の場合などと同様に，実際にはその実部をとることを暗黙のうちに仮定している．

4.2.1 TT (Transverse-Traceless) ゲージ

ここまでに得られた条件を (4.27) 式に用いると

$$\overline{h}_{\mu\nu}\ \text{は対称テンソル}\ : a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}, \tag{4.28}$$

$$\text{gauge 条件 (4.14) 式}\ : a_{\mu\alpha}k^\alpha = 0, \tag{4.29}$$

$$\text{波動方程式 (4.26)}\ : k_\alpha k^\alpha = 0 \tag{4.30}$$

より，$a_{\mu\nu}$ は $10-4=6$ の独立な自由度を持つように思えるが，実際は 2 自由度しかない．これは (4.18) 式からもわかるように，(4.14) 式を満たすように選んだ ξ^μ に $\Box\chi^\mu = 0$ を満たす χ^μ (これも無限小量であるとする) を付け加える自由度が残っているからである．(4.16) 式と (4.17) 式において，$\xi^\mu \longrightarrow \xi^\mu + \chi^\mu$ とおいたものを $\overline{h''}_{\mu\nu}$ とすれば，

$$\overline{h''}_{\mu\nu} = \overline{h'}_{\mu\nu} - \chi_{\mu,\nu} - \chi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\chi_\beta{}^{,\beta}, \tag{4.31}$$

$$\overline{h''}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \overline{h'}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} - \chi^{\mu,\alpha}{}_\alpha. \tag{4.32}$$

したがって，$\Box\chi^\mu = 0$ をみたす限り，χ^μ の自由度の存在はゲージ条件 (4.14) 式には影響しない．

そこで，より具体的に

$$\chi^\mu = -ic^\mu \exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (c^\mu\ \text{は定数}) \tag{4.33}$$

と置くと，$\Box\chi^\mu = 0$ は満たされ，かつ (4.31) 式より

$$a_{\mu\nu} \longrightarrow a_{\mu\nu} - c_\mu k_\nu - c_\nu k_\mu + \eta_{\mu\nu}c^\beta k_\beta \tag{4.34}$$

となる．この式からも $a_{\mu\nu}$ の 6 自由度のうち 4 つはこのゲージ自由度に対応していることがわかる．このように，重力波の本当の自由度は $10-4-4=2$ である．

以上の議論をふまえて，重力波の振幅 $h_{\mu\nu}$ の 10 個の成分に対して次の 8 つの条件

$$h_{\mu 0} = 0, \tag{4.35}$$

$$h_{ij}{}^{,j} = 0, \tag{4.36}$$

$$h^j{}_j = 0 \tag{4.37}$$

を課すことが普通である．(4.35) は重力波が空間成分しか持たないこと，(4.37) は重力

波のトレースが 0 (Traceless) であることを示す．この場合，(4.9) 式で定義した $\overline{h}_{\mu\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ と同じになる．

最後に (4.36) 式は，$h_{jk} \propto \exp(ik_\alpha x^\alpha)$ という平面波を考えれば

$$k^j h_{ij} = 0 \tag{4.38}$$

となり，h_{ij} が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向と直交している (Transverse) ことを示す．たとえば，x^3 方向に進む重力波の場合 $h_{i3} = 0$ となる．このため (4.35) 式 ∼(4.37) 式は TT (Transverse-Traceless) ゲージ条件と呼ばれている．

4.2.2　重力波の偏光

具体的に z 方向に進む角振動数 ω の単色平面波：

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{TT}} = a_{\mu\nu} \exp\left[-iw(t-z)\right] \tag{4.39}$$

を考えてみる．(4.35) 式 ∼(4.37) 式は，

$$a_{\mu 0} = 0, \quad a_{i3} = 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0 \tag{4.40}$$

となるので，

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv a^{+} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a^{\times} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.41}$$

に帰着する (ただし $a^{+} \equiv a_{11}$, $a^{\times} \equiv a_{12}$ とした)．

具体的に，(4.41) 式のような成分を持つ重力波 (4.39) が z 方向から入射したとすると，ミンコフスキー時空の空間的線素は

$$\begin{aligned} & dl^2 = \delta_{ij}\, dx^i dx^j \\ & \Longrightarrow dl^2 = (\delta_{ij} + h_{ij}^{\mathrm{TT}})\, dx^i dx^j \\ & \qquad = [1 + a^{+} \cos w(t-z)]\, dx^2 + [1 - a^{+} \cos w(t-z)]\, dy^2 + dz^2 \\ & \qquad\quad + 2a^{\times} \cos w(t-z)\, dxdy \end{aligned} \tag{4.42}$$

のように変化することになる．ただし，今まで単に h_{ij} と記してきたものは複素数表示

であるが，(4.42) 式ではその実部をとった．

重力波の振幅はきわめて小さいので，(4.42) 式は，計量がミンコフスキー時空のままであると解釈した場合，2 点間の微小距離が

$$dl^2 = \delta_{ij} dx'^i dx'^j, \tag{4.43}$$

$$dx' = \left(1 + \frac{a^+ \cos w(t-z)}{2}\right) dx + \frac{a^\times \cos w(t-z)}{2} dy, \tag{4.44}$$

$$dy' = \left(1 - \frac{a^+ \cos w(t-z)}{2}\right) dy + \frac{a^\times \cos w(t-z)}{2} dx \tag{4.45}$$

のように変化することを意味する．

具体的に，時空に任意の質点を選び，それを原点とする xy 平面上の単位円上 $(dx, dy) = (\cos\theta, \sin\theta)$ に他の質点が並んでいるものとする (図 4.1 の左の図の破線)．そこに z 方向から重力波が入射した場合，原点にある質点との xy 平面上での相対距離が (4.43) 式にしたがって変化する．これを ($a^+ > 0$, $a^\times = 0$) および ($a^+ = 0$, $a^\times > 0$) の場合に示したのが図 4.1 の左から右への 4 つの図である．まさに $+$ と $\times$ という記号の示す通りの偏光モード a^+, $a^\times$ にしたがった変化のパターンを示すことがわかる．

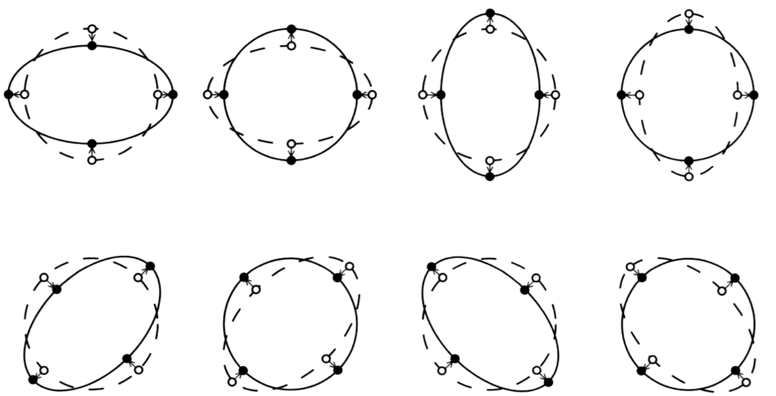


図 4.1　重力波の 2 つの偏光に対する応答の時間変化 (左から右へと変化する)．上：プラスモード，下：クロスモード．

4.3　測地線偏差の方程式

次に重力波の検出原理を考えてみよう．そもそも，等価原理によれば，空間の一点に着目しているだけでは，重力の存在を知ることはできない．したがって，どうしても有限の長さだけ離れた 2 点間の相対運動を知る必要がある．(4.42) 式を有限の長さに拡張したものは，そのもっとも端的な例であるといえる[5)]．この相対運動を記述する方程式を導いてみよう．

近接した 2 点 x^μ と $x^\mu+\xi^\mu$ にある 2 つの質点が，何らかの外力 $F^\mu_{\rm ext}$ を受けて運動しているものとする ($\xi^\mu \ll x^\mu$)．それらが満たす運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=F^\mu_{\rm ext}(x), \tag{4.46}$$

$$\frac{d^2(x^\mu+\xi^\mu)}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x+\xi)\frac{d(x^\alpha+\xi^\alpha)}{d\tau}\frac{d(x^\beta+\xi^\beta)}{d\tau}=F^\mu_{\rm ext}(x+\xi). \tag{4.47}$$

これらの差をとって ξ^μ の 1 次まで書き下すと，

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma}(x)\xi^\gamma\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(x)\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\\&=F^\mu_{{\rm ext},\nu}\xi^\nu\equiv f^\mu_{\rm ext}.\end{aligned} \tag{4.48}$$

方程式の共変性が明白になるように，絶対微分：

$$\frac{D\xi^\mu}{D\tau}\equiv\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\mu{}_{;\beta}=\frac{d\xi^\mu}{d\tau}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{4.49}$$

を用いて (4.48) 式を書き直すことにする．まず，

$$\begin{aligned}\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}&=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{D\xi^\mu}{D\tau}\right)+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{D\xi^\alpha}{D\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\\&=\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\alpha\frac{dx^\gamma}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\xi^\alpha\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2}\right)\\&\quad+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}+\Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma}\xi^\rho\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)\end{aligned}$$

---

5) これは人生についても同じである．誰しも自分はまっすぐな人生を歩んでいると信じているはずだ．これはいわゆる測地線の方程式に対応する．いかに曲がった時空であろうと測地線は局所的には直線とみなすことができる．紆余曲折を経た人生を歩むのは自分のせいではなく，歪んでいる社会 (= 時空) のためであるとみんな考えているに違いない．仮に自分の人生がうまくいかなかったとしても，それが自分の責任なのか社会の責任なのかは決してわからない．これこそ相対論の真髄である．それを区別するには同じような境遇にいる身近な友人の人生と自分の人生を比べてみればよい．ここで説明する測地線偏差の方程式とはまさにそれである．私が一般相対論 = 人生論と主張する所以である．

$$= \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} + 2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$- \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Gamma^\beta{}_{\rho\sigma}\xi^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma}\xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \left(\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha,\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\beta\nu}\Gamma^\nu{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}\Gamma^\nu{}_{\beta\gamma}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\xi^\beta\frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

$$+ 2\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}. \tag{4.50}$$

これを用いると，(4.48) 式は

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + \underbrace{\left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\gamma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}\right)}_{=R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\xi^\beta\frac{dx^\gamma}{d\tau} = f^\mu_{\rm ext}$$

$$\Longrightarrow \frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + R^\mu{}_{\alpha\beta\gamma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\xi^\beta\frac{dx^\gamma}{d\tau} = f^\mu_{\rm ext} \tag{4.51}$$

となる．これを測地線偏差の方程式と呼ぶ．(4.51) 式の各項はそれぞれが共変性をもつベクトルとなっていることを注意しておこう．

4.4 重力波の検出原理

地上の観測者に対しては近似的に

$$d\tau \approx dt, \quad \frac{dx^0}{d\tau} \approx 1, \quad \frac{dx^i}{d\tau} \approx 0 \tag{4.52}$$

が成り立つので，(4.51) 式は

$$\frac{d^2\xi^j}{dt^2} + R^j{}_{0k0}\xi^k = f^j_{\rm ext} \tag{4.53}$$

と近似できる[6]．TT ゲージでは $h_{\mu\nu}$ の空間成分以外は 0 なので

$$\Gamma^j{}_{00} \approx \frac{1}{2}(2h^j{}_{0,0} - h_{00}{}^{,j}) \approx 0, \tag{4.54}$$

$$\Gamma^j{}_{0k} \approx \frac{1}{2}(h^j{}_{0,k} + h^j{}_{k,0} - h_{0k}{}^{,j}) = \frac{1}{2}h^j{}_{k,0} \tag{4.55}$$

に注意すると，

$$R^j{}_{0k0} \approx \Gamma^j{}_{00,k} - \Gamma^j{}_{0k,0} + O(h^2) \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^j{}_k}{\partial t^2}. \tag{4.56}$$

したがって，(4.53) 式は

---

6) リーマンテンソルの対称性から $R^\mu{}_{000}$ は常にゼロであることに注意.

$$\frac{d^2\xi^j}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\mathrm{TT}j}{}_k}{\partial t^2}\xi^k + f^j_{\mathrm{ext}} \tag{4.57}$$

に帰着する．(4.57) 式の右辺の第 1 項は重力波による実効的な力：

$$f^j_{\mathrm{GW}} \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h^{\mathrm{TT}j}{}_k}{\partial t^2}\xi^k \tag{4.58}$$

とみなすことができる．

ξ^j_0 の距離にあった 2 点が重力波のために

$$\xi^j = \xi^j_0 + \Delta\xi^j{}_{\mathrm{GW}} \tag{4.59}$$

と変化したとする．(4.57) 式を用いて，重力波 $h^{\mathrm{TT}j}{}_k \sim he^{-iwt}$ の入射によって引き起こされる $\Delta\xi^j{}_{\mathrm{GW}}$ の大きさを見積もってみる．

4.4.1　レーザー干渉計検出器

2 つのおもりを外力のない ($f^j_{\mathrm{ext}} = 0$) 状態で遠く離し ($\xi_0 \sim 100\mathrm{km}$)，レーザー干渉計を用いてその距離の微小変化

$$\Delta\xi_{\mathrm{GW}} \approx 10^{-16}\left(\frac{h}{10^{-21}}\right)\left(\frac{\xi_0}{100\mathrm{km}}\right)\mathrm{m} \tag{4.60}$$

を精密測定するものである．これは，0.1 ∼ 10kHz の広い周波数領域をカバーすることができ，現在もっとも有望な手法であると考えられている．日本の TAMA300, 米国の LIGO, フランス・ドイツの VIRGO など多くのプロジェクトが進行中で，さらに重力波干渉計衛星を打ち上げる計画も提案されている (LISA)．

4.4.2　共振型検出器

特定の振動数 w をもつ重力波に対しては，共振振動数 w_0 ($\approx w$) をもつ弾性体の振動を利用する方法も考えられる．この場合，弾性体は重力波の外力に対応して

$$\frac{d^2\Delta\xi_{\mathrm{GW}}}{dt^2} + \frac{1}{\tau_{\mathrm{Q}}}\frac{d\Delta\xi_{\mathrm{GW}}}{dt} + w_0^2\Delta\xi_{\mathrm{GW}} = -w^2 h\xi_0 \tag{4.61}$$

という強制振動を行う．減衰時間 τ_{Q} は，振動体の Q 値と共振振動数 w_0 を用いると Q/w_0 である．これから桁を見積もると，

$$\begin{aligned}\Delta\xi_{\mathrm{GW}} &\approx \left|\frac{w^2 h\xi_0}{w_0^2 - w^2 - iw_0/\tau_{\mathrm{Q}}}\right| \approx w_0\tau_Q h\xi_0 \\ &= 10^{-15}\left(\frac{Q}{10^6}\right)\left(\frac{h}{10^{-21}}\right)\left(\frac{\xi_0}{1\mathrm{m}}\right)\mathrm{m}\end{aligned} \tag{4.62}$$

となる．1969 年にメリーランド大学のヨゼフ・ウェーバーは 1m 程度の弾性体の振動をモニターして銀河中心からの重力波を検出したと報告した．この報告自体は誤りだと

考えられているが，重力波の直接検出というテーマが世界中で試みられる大きな契機となった．日本では，東京大学の平川浩正先生の研究室が独自の共振型アンテナを開発し，かにパルサーからの 60Hz の周波数の重力波の検出を目指すというユニークな研究を展開した．残念ながら平川先生はご病気のため定年をまたずして亡くなられたが，かつての学生の多くが現在，我が国の重力波実験を率いる研究者として活躍している．

4.5 大局的保存則と重力場のエネルギー運動量擬テンソル

一般相対論におけるエネルギー運動量保存則とは

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{4.63}$$

のことをさす．これは微分方程式であるからあくまで局所的なものである．通常はこれを積分型に書き直すことが可能であり，その意味で局所的保存則と大局的保存則は同等のはずだ．しかし一般相対論の場合，物理量は時空の各点で局所的に定義されねばならず，それらを有限の領域で積分したものは一般座標変換に対して適切な変換性を示さなくなる．したがって，大局的保存則，さらには，大局的な保存量の意味でのエネルギーや運動量の存在は必ずしも保証されない．これには，重力場自身の持つエネルギー運動量をどのように定義するかという，より深遠な問題がかかわってくる．

この事情を具体的に見るために，まず

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} &= T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} + \underbrace{\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\nu}}_{=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}}} T^{\mu\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} T^{\mu\nu}\right)_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} T^{\alpha\nu} \end{aligned} \tag{4.64}$$

と変形する．仮に上式の第 2 項が存在しないものとすれば，第 1 項に不変 4 次元体積要素 $\sqrt{-g}\, d^4x$ をかけて積分することで

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} T^{\mu\nu}\right)_{,\nu} \sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g} T^{\mu 0}\right) dt d^3x + \int \left(\sqrt{-g} T^{\mu i}\right)_{,i} dt d^3x \\ &= \int_{t_2} \left(\sqrt{-g} T^{\mu 0}\right) d^3x - \int_{t_1} \left(\sqrt{-g} T^{\mu 0}\right) d^3x + \int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\sqrt{-g} T^{\mu i}\right) dS_i \end{aligned} \tag{4.65}$$

とできる (最後の積分の変形にはガウスの定理を用いた)．さらに，物質場が孤立している場合には上式の第 3 項の被積分関数は無限遠で 0 に漸近する．したがって $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} =$

0 の両辺を積分して，時間一定面上での保存量：

$$\int_t (\sqrt{-g}T^{\mu 0})\, d^3x = \text{一定} \tag{4.66}$$

を定義できるはずである．しかし実際には，(4.64) 式の 2 つめの等式の第 2 項が存在するため，そうはうまくいかないのである．

以上の考察によって，局所的なエネルギー運動量保存則 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ に対応した大局的保存量を導くためには，その式を共変微分ではなく偏微分を用いた保存形，たとえば

$$\left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0, \tag{4.67}$$

あるいは

$$\left[(-g)\left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right)\right]_{,\nu} = 0 \tag{4.68}$$

といった形に変形しておく必要があることがわかる．つまり，共変微分の中に含まれているはずの重力場のエネルギー運動量をあらわに示すようなテンソル $t^{\mu\nu}$ を定義して (4.67) 式か (4.68) 式の形に変形できないか，という問題に帰着するのだ．

しかしながら，厳密に言えばこれは不可能なのである．そもそも (4.63) 式はテンソル形の微分方程式であるから，仮に $t^{\mu\nu}$ がテンソルだとすれば，偏微分もまた正しい座標変換性を示すことになり矛盾する．ただし厳密な意味でのテンソルであることを放棄すれば，(4.67) 式や (4.68) 式を満たすような $t^{\mu\nu}$ を具体的に構築できることが知られている．このような $t^{\mu\nu}$ を重力場のエネルギー運動量擬テンソルと呼ぶ．

天下り的ではあるが，ミスナー，ソーン，ホイーラーの教科書で提案されている重力場のエネルギー運動量擬テンソルの表式[7] を簡単に紹介しておこう．以下では

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \tag{4.69}$$

が，近似ではなく厳密な定義であるという立場で議論を進める．

(4.13) 式は，アインシュタインテンソルを $h^{\mu\nu}$ に関して展開して線形化したものとなっている．そこでは $h_{\mu\nu}$ を (4.1) 式のように解釈することを前提としていたが，ここでは (4.69) 式で定義した上で，(4.13) 式の右辺をアインシュタインテンソルの $h^{\mu\nu}$ に関する 1 次項を集めたものと解釈して $G_{\mu\nu(1)}$ と定義する．この場合，$G^{\mu\nu(1)}$ についても同様にして

$$2G^{\mu\nu(1)} \equiv -\overline{h}^{\mu\nu}{}_{,\alpha}{}^{\alpha} - \eta^{\mu\nu}\overline{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \overline{h}^{\mu}{}_{\alpha,}{}^{\alpha\nu} + \overline{h}^{\nu}{}_{\alpha,}{}^{\alpha\mu} \tag{4.70}$$

とする．これを踏まえて，ミスナー，ソーン，ホイーラーは，

---

[7] C.W.Misner, K.S.Thorne & J.A.Wheeler “Gravitation” (W.H.Freeman, 1972) §20.

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm MTW}{}_{,\alpha\beta} = 2G^{\mu\nu(1)} \tag{4.71}$$

という関係式が成り立つ量として，

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm MTW} \equiv \overline{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu} - \overline{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \overline{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \overline{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} \tag{4.72}$$

を定義した．

そこで，

$$t^{\mu\nu}_{\rm MTW} \equiv \frac{1}{8\pi G}\left(G^{\mu\nu(1)} - G^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{16\pi G}\left(H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm MTW}{}_{,\alpha\beta} - 2G^{\mu\nu}\right) \tag{4.73}$$

と定義すれば，$t^{\mu\nu}_{\rm MTW}$ はアインシュタインテンソルのうち，$h^{\mu\nu}$ の 2 次以上の項からなる量であることがわかる．この場合，アインシュタイン方程式より

$$\begin{aligned} H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm MTW}{}_{,\alpha\beta} &= 2G^{\mu\nu} + 16\pi G t^{\mu\nu}_{\rm MTW} \\ &= 16\pi G\left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\rm MTW}\right) \end{aligned} \tag{4.74}$$

が成り立つ．(4.72) 式は添字 ν と β の交換に対して符号を変える (反対称) から

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm MTW}{}_{,\alpha\beta\nu} = 0 \Longrightarrow \left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\rm MTW}\right)_{,\nu} = 0 \tag{4.75}$$

が導ける．これは (4.67) 式に対応する．

一方，(4.68) 式に対応する例が，ランダウ-リフシッツの教科書[8] で与えられている．その結果のみを書いておくと，まず

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm LL} \equiv (-g)\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}\right) \tag{4.76}$$

と選んで

$$t^{\mu\nu}_{\rm LL} \equiv \frac{1}{16\pi G(-g)}\left(H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm LL}{}_{,\alpha\beta} - 2(-g)G^{\mu\nu}\right) = \frac{H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm LL}{}_{,\alpha\beta}}{16\pi G(-g)} - T^{\mu\nu} \tag{4.77}$$

を定義する．この場合

$$H^{\mu\alpha\nu\beta}_{\rm LL}{}_{,\alpha\beta\nu} = 0 \Longrightarrow \left[(-g)\left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\rm LL}\right)\right]_{,\nu} = 0 \tag{4.78}$$

となり，(4.68) 式の例になっている．(4.77) 式の具体的な表式は以下の通りである．

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu}_{\rm LL} = \frac{1}{16\pi G} \Big[& \left(2\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho} - \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\rho}\right)\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right) \\ & + g^{\mu\alpha}g^{\beta\gamma}\left(\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\nu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\nu}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\right) \\ & + g^{\nu\alpha}g^{\beta\gamma}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\gamma}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\gamma\rho}\right) \\ & + g^{\alpha\beta}g^{\gamma\rho}\left(\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\rho} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}{}_{\gamma\rho}\right) \Big]. \end{aligned} \tag{4.79}$$

---

[8] L.D.Landau & E.M. Lifshitz "The Classical Theory of Fields" (Pergamon, 1972) §96.

このように，$t_{\mu\nu}$ は，存在はするが一意的でないことからもわかるように，座標系の選びかたに依存しておりテンソルではない．そもそも，等価原理を考えれば，重力場は局所的には常に消去できるはずなので，そのエネルギー運動量をテンソルで表現することは原理的に不可能なのだ．ただし，漸近的に平坦な時空：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{-1}), \quad g_{\mu\nu,\alpha} = O(r^{-2}) \tag{4.80}$$

に座標系を限定する限り，大局的な保存量，たとえば，

$$P^{\mu}_{\rm LL} = \int (-g)\,(T^{\mu 0} + t^{\mu 0}_{\rm LL})\; d^3x \;\; \text{あるいは} \;\; P^{\mu}_{\rm MTW} = \int (T^{\mu 0} + t^{\mu 0}_{\rm MTW})\; d^3x \tag{4.81}$$

が存在し，かつこの 2 つは等しいことが示されている．つまり，考える座標系の性質をある程度制限すれば，大局的に意味をもつ保存量を定義できるわけである．

以上をまとめると，一般の時空では，局所的なエネルギー運動量保存則は常に満たされているものの，それに対応した大局的な保存量は存在しない．その意味で，大局的保存量を探すことはそもそも概念的に不可能なのである．どうしてもそのような保存量を考えたいのであれば，たとえば漸近的に平坦な時空に限定するなど，座標系を制限する必要がある．

4.6　重力波のエネルギー運動量擬テンソルに対するアイザックソンの式

振幅 h ($\ll 1$), 典型的波長 λ を持つ重力波が真空中を伝搬する場合を考え，この重力波が運ぶエネルギー運動量擬テンソルの近似的表式を導いてみよう[9]．まず時空の計量を

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{4.82}$$

と分解する．ここで，$h_{\mu\nu}$ が重力波を，$\gamma_{\mu\nu}$ がこの重力波の存在する背景時空の計量を表す．この背景時空はミンコフスキー時空 $\eta_{\mu\nu}$ としてよいと考えてしまいがちであるが，じつは重力波自身の反作用を受ける結果，ミンコフスキー時空 $\eta_{\mu\nu}$ から若干変更を受ける．その効果を適切に採り入れることが，以下の議論で重要かつ面倒な点である．

クリストッフェル記号とリッチテンソルを $h_{\mu\nu}$ に関して展開し，その項の次数に応じて

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha\,(0)}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha\,(1)}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha\,(2)}_{\mu\nu} + \cdots, \tag{4.83}$$

---

[9] この節の議論は C.W.Misner, K.S.Thorne & J.A.Wheeler "Gravitation" (W.H.Freeman, 1972) の §35 の方針に基づいて具体的な計算を示したものである．

$$R_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots \tag{4.84}$$

とおく．以降，特に断らない限り $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu}$ や $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ などは計量 $g_{\mu\nu}$ を用いて定義されたものをさし，計量 $\gamma_{\mu\nu}$ を用いて定義されたものは上添字に (0) を付け，$\Gamma^{\alpha}{}^{(0)}_{\beta\nu}$, $R^{\alpha}{}^{(0)}_{\beta\mu\nu}$ などと書いて区別する．また，計量 $g_{\mu\nu}$ に関する共変微分を ; (セミコロン)，$\gamma_{\mu\nu}$ に関する共変微分を | (縦棒)，偏微分を , (コロン) で記すことにする．

4.6.1 $g^{\mu\nu}$

まず h について 3 次のオーダーまでで

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\nu} - h^{\mu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\nu} + O(h^4) \tag{4.85}$$

となることを注意しておこう．ただし $\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$ とし，$h_{\mu\nu}$ と $h^{\mu\nu}$ の添字の上げ下げは $\gamma^{\mu\nu}$ と $\gamma_{\mu\nu}$ を用いて行うものとする．(4.85) 式は，具体的に (4.82) 式と縮約をとってみると

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} &= (\gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\gamma^{\nu\sigma} - h^{\nu\sigma} + h^{\nu\alpha}h_{\alpha}{}^{\sigma} - h^{\nu\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\sigma}) \\
&= \delta_{\mu}{}^{\sigma} - h_{\mu}{}^{\sigma} + h_{\mu}{}^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\sigma} - h_{\mu}{}^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\beta}h_{\beta}{}^{\sigma} \\
&\quad + h_{\mu}{}^{\sigma} - h_{\mu\nu}h^{\nu\sigma} + h_{\mu\nu}h^{\nu\alpha}h_{\alpha}{}^{\sigma} + O(h^4) \\
&= \delta_{\mu}{}^{\sigma} + O(h^4)
\end{aligned} \tag{4.86}$$

となることから確認できる．

4.6.2 $S^{\mu}{}_{\beta\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}{}^{(0)}_{\beta\nu}$

次に $g_{\mu\nu}$ に関するクリストッフェル記号 ($\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu}$) と $\gamma_{\mu\nu}$ に関するクリストッフェル記号 ($\Gamma^{\mu}{}^{(0)}_{\beta\nu}$) の差として

$$S^{\mu}{}_{\beta\nu} \equiv \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}{}^{(0)}_{\beta\nu} \tag{4.87}$$

を定義する．クリストッフェル記号の座標変換則は

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}, \tag{4.88}$$

$$\Gamma^{\mu'(0)}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'}}\Gamma^{\rho(0)}{}_{\lambda\sigma} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}} \tag{4.89}$$

なので，(4.87) 式の $S^{\mu}{}_{\beta\nu}$ に対してはこれら 2 つの式を辺々引き算することで

$$S^{\mu'}{}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'}}S^{\rho}{}_{\lambda\sigma} \tag{4.90}$$

が得られる．つまりこれはクリストッフェル記号とは異なり，添字の示す通りのテンソルとなっている．

このテンソルの最初の添字を下げたものは

$$S_{\alpha\beta\nu} = g_{\alpha\mu} S^{\mu}{}_{\beta\nu} = g_{\alpha\mu}(\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu(0)}_{\ \beta\nu})$$

$$= \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta|\nu} + h_{\alpha\nu|\beta} - h_{\beta\nu|\alpha}) \tag{4.91}$$

で与えられることがわかる．これを示すために，まず (4.91) 式の最後の等号の後の式を変形すると

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta|\nu} + h_{\alpha\nu|\beta} - h_{\beta\nu|\alpha} &= h_{\alpha\beta,\nu} - h_{\rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\nu} - h_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \beta\nu} \\ &\quad + h_{\alpha\nu,\beta} - h_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\beta} - h_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta} \\ &\quad - h_{\beta\nu,\alpha} + h_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \beta\alpha} + h_{\beta\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha} \\ &= h_{\alpha\beta,\nu} + h_{\alpha\nu,\beta} - h_{\beta\nu,\alpha} - 2h_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \beta\nu}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

一方，(4.91) 式の 2 つめの等号の後の式は

$$\begin{aligned} 2g_{\alpha\mu}(\Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu(0)}_{\ \beta\nu}) &= 2\Gamma_{\alpha\beta\nu} - 2(\gamma_{\alpha\mu} + h_{\alpha\mu})\Gamma^{\mu(0)}_{\ \beta\nu} \\ &= 2\Gamma_{\alpha\beta\nu} - 2\Gamma^{(0)}_{\alpha\beta\nu} - 2h_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \beta\nu} \\ &= h_{\alpha\beta,\nu} + h_{\alpha\nu,\beta} - h_{\beta\nu,\alpha} - 2h_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \beta\nu} \end{aligned} \tag{4.93}$$

であるから，両者が等しいことが示された．

4.6.3　$R^{(1)}_{\alpha\beta}$

さらにリーマンテンソルの定義：

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta,\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}, \tag{4.94}$$

$$R^{\mu(0)}_{\ \alpha\nu\beta} = \Gamma^{\mu(0)}_{\ \alpha\beta,\nu} - \Gamma^{\mu(0)}_{\ \alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\mu(0)}_{\ \rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\beta} - \Gamma^{\mu(0)}_{\ \rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\nu} \tag{4.95}$$

を用いれば

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} - R^{\mu(0)}_{\ \alpha\nu\beta} = S^{\mu}{}_{\alpha\beta|\nu} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu|\beta} + S^{\mu}{}_{\rho\nu}S^{\rho}{}_{\alpha\beta} - S^{\mu}{}_{\rho\beta}S^{\rho}{}_{\alpha\nu} \tag{4.96}$$

となることを示す．そのために (4.96) 式の右辺に $S^{\mu}{}_{\beta\nu} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu(0)}_{\ \beta\nu}$ を代入してみる．まず，(4.96) 式の第 1 項と第 2 項は

$$S^{\mu}{}_{\alpha\beta|\nu} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu|\beta}$$

$$= S^{\mu}{}_{\alpha\beta,\nu} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu,\beta} + S^{\rho}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu(0)}_{\ \rho\nu} - S^{\rho}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu(0)}_{\ \rho\beta}$$

$$- S^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\nu} + S^{\mu}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\beta} \underbrace{-S^{\mu}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\beta\nu} + S^{\mu}{}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\nu\beta}}_{=0}$$

$$= S^{\mu}{}_{\alpha\beta,\nu} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu(0)}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu(0)}_{\rho\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\beta}$$

$$- 2\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu(0)}_{\rho\nu} + 2\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\nu}\Gamma^{\mu(0)}_{\rho\beta}. \tag{4.97}$$

次に，第 3 項と第 4 項は

$$S^{\mu}{}_{\rho\nu}S^{\rho}{}_{\alpha\beta} - S^{\mu}{}_{\rho\beta}S^{\rho}{}_{\alpha\nu}$$

$$= \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu(0)}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu(0)}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\nu}$$

$$- \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu(0)}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu(0)}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}. \tag{4.98}$$

これら 2 つの式を足し合わせると多くの項がキャンセルする結果,

$$S^{\mu}{}_{\alpha\beta|\nu} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu|\beta} + S^{\mu}{}_{\rho\nu}S^{\rho}{}_{\alpha\beta} - S^{\mu}{}_{\rho\beta}S^{\rho}{}_{\alpha\nu}$$

$$= S^{\mu}{}_{\alpha\beta,\nu} - S^{\mu}{}_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\alpha\nu}$$

$$- \Gamma^{\mu(0)}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu(0)}_{\rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\alpha\nu} \tag{4.99}$$

となり，(4.94) 式と (4.95) 式の差になっていることがわかる.

(4.96) 式をその 1 番めと 3 番めの添字について縮約すると

$$R_{\alpha\beta} - R^{(0)}_{\alpha\beta} = S^{\mu}{}_{\alpha\beta|\mu} - S^{\mu}{}_{\alpha\mu|\beta} + S^{\mu}{}_{\rho\mu}S^{\rho}{}_{\alpha\beta} - S^{\mu}{}_{\rho\beta}S^{\rho}{}_{\alpha\mu} \tag{4.100}$$

という関係式が得られる.

(4.91) 式のように $S_{\alpha\beta\nu}$ は $h_{\mu\nu}$ に関する 1 次の式なので，$S^{\alpha}{}_{\mu\nu} \equiv g^{\alpha\beta}S_{\beta\mu\nu}$ の h に関する 1 次の項は

$$S^{\alpha(1)}_{\mu\nu} \equiv \gamma^{\alpha\rho}S_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\rho}(h_{\rho\mu|\nu} + h_{\rho\nu|\mu} - h_{\mu\nu|\rho})$$

$$= \frac{1}{2}(h^{\alpha}{}_{\mu|\nu} + h^{\alpha}{}_{\nu|\mu} - h_{\mu\nu}{}^{|\alpha}) \tag{4.101}$$

で与えられる．また「|」は $\gamma_{\mu\nu}$ に関する共変微分であるから，それを用いた添字の上げ下げとは可換である.

(4.100) 式の第 3 項と第 4 項は $h_{\mu\nu}$ に関して 2 次以上の式であるから，$h_{\mu\nu}$ に関して 1 次までの項は

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = S^{\rho(1)}_{\alpha\beta|\rho} - S^{\rho(1)}_{\alpha\rho|\beta}$$

$$= \frac{1}{2}(h^{\rho}{}_{\alpha|\beta\rho} + h^{\rho}{}_{\beta|\alpha\rho} - h_{\alpha\beta}{}^{|\rho}{}_{\rho} - h^{\rho}{}_{\alpha|\rho\beta} - h^{\rho}{}_{\rho|\alpha\beta} + h_{\alpha\rho}{}^{|\rho}{}_{\beta})$$

$$= \frac{1}{2}(h_{\rho\alpha|\beta}{}^{\rho} + h_{\rho\beta|\alpha}{}^{\rho} - h_{|\alpha\beta} - h_{\alpha\beta|\rho}{}^{\rho}). \tag{4.102}$$

つまり (4.84) 式の $R^{(1)}_{\alpha\beta}$ が

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\mu\alpha|\beta}{}^{\mu} + h_{\mu\beta|\alpha}{}^{\mu} - h_{|\alpha\beta} - h_{\alpha\beta|\mu}{}^{\mu}) \tag{4.103}$$

で与えられることが示された.

4.6.4 $R^{(2)}_{\alpha\beta}$

次に (4.100) 式を $h_{\mu\nu}$ に関して 2 次まで展開すると

$$R^{(2)}_{\alpha\beta} = S^{\rho(2)}_{\ \ \alpha\beta|\rho} - S^{\rho(2)}_{\ \ \alpha\rho|\beta} + S^{\mu(1)}_{\ \ \rho\mu} S^{\rho(1)}_{\ \ \alpha\beta} - S^{\mu(1)}_{\ \ \rho\beta} S^{\rho(1)}_{\ \ \alpha\mu} \tag{4.104}$$

となる. ただし (4.85) 式と合わせて, $S^{\rho}{}_{\beta\nu}$ の $O(h^2)$ の項を

$$S^{\rho(2)}_{\ \ \alpha\beta} = -\frac{1}{2}h^{\rho\mu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) \tag{4.105}$$

とした. 以下, (4.104) 式を具体的に計算してみよう.

まず

$$\begin{aligned}
&2(S^{\rho(2)}_{\ \ \alpha\beta|\rho} - S^{\rho(2)}_{\ \ \alpha\rho|\beta}) \\
&= -[h^{\rho\mu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu})]_{|\rho} + [h^{\rho\mu}(h_{\mu\alpha|\rho} + h_{\mu\rho|\alpha} - h_{\alpha\rho|\mu})]_{|\beta} \\
&= h^{\rho\mu}(-h_{\mu\alpha|\beta\rho} - h_{\mu\beta|\alpha\rho} + h_{\alpha\beta|\mu\rho} + h_{\mu\alpha|\rho\beta} + h_{\mu\rho|\alpha\beta} - h_{\alpha\rho|\mu\beta}) \\
&\quad - h^{\rho\mu}{}_{|\rho}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) + h^{\rho\mu}{}_{|\beta}(h_{\mu\alpha|\rho} + h_{\mu\rho|\alpha} - h_{\alpha\rho|\mu}) \\
&= h^{\mu\nu}(h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) \\
&\quad - h^{\mu\nu}{}_{|\nu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) + h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

次に

$$\begin{aligned}
&4(S^{\mu(1)}_{\ \ \rho\mu} S^{\rho(1)}_{\ \ \alpha\beta} - S^{\mu(1)}_{\ \ \rho\beta} S^{\rho(1)}_{\ \ \alpha\mu}) \\
&= (h^{\mu}{}_{\rho|\mu} + h^{\mu}{}_{\mu|\rho} - h_{\rho\mu}{}^{|\mu})(h^{\rho}{}_{\alpha|\beta} + h^{\rho}{}_{\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{|\rho}) \\
&\quad - (h^{\mu}{}_{\rho|\beta} + h^{\mu}{}_{\beta|\rho} - h_{\rho\beta}{}^{|\mu})(h^{\rho}{}_{\alpha|\mu} + h^{\rho}{}_{\mu|\alpha} - h_{\alpha\mu}{}^{|\rho}) \\
&= h_{|\rho}(h^{\rho}{}_{\alpha|\beta} + h^{\rho}{}_{\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{|\rho}) \\
&\quad - (h^{\mu}{}_{\rho|\beta} + h^{\mu}{}_{\beta|\rho} - h_{\rho\beta}{}^{|\mu})(h^{\rho}{}_{\alpha|\mu} + h^{\rho}{}_{\mu|\alpha} - h_{\alpha\mu}{}^{|\rho}) \\
&= h^{|\mu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) \\
&\quad - (h^{\mu}{}_{\rho|\beta} + h^{\mu}{}_{\beta|\rho} - h_{\rho\beta}{}^{|\mu})(h^{\rho}{}_{\alpha|\mu} + h^{\rho}{}_{\mu|\alpha} - h_{\alpha\mu}{}^{|\rho}).
\end{aligned} \tag{4.107}$$

上式の最後の項をさらに展開すると

$$
\begin{aligned}
&(h^{\mu}{}_{\rho|\beta} + h^{\mu}{}_{\beta|\rho} - h_{\rho\beta}{}^{|\mu})(h^{\rho}{}_{\alpha|\mu} + h^{\rho}{}_{\mu|\alpha} - h_{\alpha\mu}{}^{|\rho}) \\
&= h^{\mu\rho}{}_{|\beta}(h_{\rho\alpha|\mu} + h_{\rho\mu|\alpha} - h_{\alpha\mu|\rho}) + h_{\mu\beta}{}^{|\rho}(h_{\rho\alpha}{}^{|\mu} + h_{\rho}{}^{\mu}{}_{|\alpha} - h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{|\rho}) \\
&\quad - h_{\mu\beta}{}^{|\rho}(h^{\mu}{}_{\alpha|\rho} + h^{\mu}{}_{\rho|\alpha} - h_{\alpha\rho}{}^{|\mu}) \\
&= h^{\mu\rho}{}_{|\beta}h_{\rho\mu|\alpha} + h_{\mu\beta}{}^{|\rho}(h_{\rho\alpha}{}^{|\mu} + h_{\rho}{}^{\mu}{}_{|\alpha} - h_{\alpha}{}^{\mu}{}_{|\rho} - h^{\mu}{}_{\alpha|\rho} - h^{\mu}{}_{\rho|\alpha} + h_{\alpha\rho}{}^{|\mu}) \\
&= h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha} + 2h_{\beta}{}^{\mu|\nu}(h_{\nu\alpha|\mu} - h_{\alpha\mu|\nu}).
\end{aligned}
\tag{4.108}
$$

これらをまとめると，(4.104) 式を $h_{\mu\nu}$ で具体的に書き下した表式：

$$
\begin{aligned}
R^{(2)}_{\alpha\beta} = &\frac{1}{2}h^{\mu\nu}(h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) \\
&- \frac{1}{2}h^{\mu\nu}{}_{|\nu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) \\
&+ \frac{1}{2}h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{4}h^{|\mu}(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) \\
&- \frac{1}{4}h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha} - \frac{1}{2}h_{\beta}{}^{\mu|\nu}(h_{\nu\alpha|\mu} - h_{\alpha\mu|\nu}) \\
= &\frac{1}{4}h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) \\
&- \frac{1}{2}\left(h^{\mu\nu}{}_{|\nu} - \frac{1}{2}h^{|\mu}\right)(h_{\mu\alpha|\beta} + h_{\mu\beta|\alpha} - h_{\alpha\beta|\mu}) \\
&+ \frac{1}{2}h_{\beta}{}^{\mu|\nu}(h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu})
\end{aligned}
\tag{4.109}
$$

が得られる．

4.6.5 背景時空に対するアインシュタイン方程式と重力波のエネルギー運動量擬テンソル

背景時空 $\gamma_{\mu\nu}$ の典型的な曲率半径を $\mathscr{R}$ ($\gg$ 重力波の波長 λ) とすると，

$$
\gamma_{\mu\nu} = O(1), \quad \gamma_{\mu\nu,\alpha} = O(1/\mathscr{R}), \quad \gamma_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(1/\mathscr{R}^2), \tag{4.110}
$$

$$
h_{\mu\nu} = O(h), \quad h_{\mu\nu,\alpha} = O(h/\lambda), \quad h_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(h/\lambda^2) \tag{4.111}
$$

が成り立つ．この状況で真空中のアインシュタイン方程式：

$$
R_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + R^{(3)}_{\mu\nu} + \cdots = 0 \tag{4.112}
$$

を解くことを考える．まず (4.103) 式と (4.109) 式より

$$R^{(0)}_{\mu\nu} = O(1/\mathscr{R}^2), \quad R^{(1)}_{\mu\nu} = O(h/\lambda^2), \quad R^{(2)}_{\mu\nu} = O(h^2/\lambda^2). \tag{4.113}$$

h について線形である $R^{(1)}_{\mu\nu}$ は重力波の伝搬方程式を与えるので，これは今の近似のレベルでは他の項とは独立に 0 となる必要がある．次に，(4.112) 式を，重力波の波長 λ よりも十分長くかつ背景時空の曲率半径 $\mathscr{R}$ よりは十分短いスケールで空間平均してみると，

$$\langle R_{\mu\nu}\rangle = \langle R^{(0)}_{\mu\nu}\rangle + \langle R^{(1)}_{\mu\nu}\rangle + \langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle + \cdots = R^{(0)}_{\mu\nu} + \langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle + \cdots = 0 \tag{4.114}$$

となる．つまり $R^{(2)}_{\mu\nu}$ を空間平均成分 $\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle$ とその回りでの揺らぎの成分 $R^{(2)}_{\mu\nu} - \langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle$ に分離して，(4.112) 式を

$$\text{波動成分} \ : R^{(1)}_{\mu\nu} = 0, \tag{4.115}$$

$$\text{平均成分} \ : R^{(0)}_{\mu\nu} + \langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle = 0, \tag{4.116}$$

$$\text{高次ゆらぎ成分} \ : R^{(2)}_{\mu\nu} - \langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle + \langle R^{(3)}_{\mu\nu}\rangle + \cdots = 0 \tag{4.117}$$

に分解して解く．この考え方にしたがえば，h^2 の項が $\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle$ を通じて実効的な反作用を及ぼすために，背景時空はミンコフスキー時空からずれることになる．この場合，アインシュタイン方程式を

$$G^{(0)}_{\mu\nu} = R^{(0)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}R^{(0)} = -\left(\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\langle R^{(2)}\rangle\right) \equiv 8\pi t^{\mathrm{GW}}_{\mu\nu} \tag{4.118}$$

とおくことができる．すなわち，

$$t^{\mathrm{GW}}_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\left(\langle R^{(2)}_{\mu\nu}\rangle - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\langle R^{(2)}\rangle\right) \tag{4.119}$$

を重力波に対するエネルギー運動量擬テンソルとみなしてよい．(4.118) 式は，重力波の振幅の非線型の最低次である 2 次の項が実効的なエネルギー運動量テンソルとして，ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ に反作用を与えた結果背景時空 $\gamma_{\mu\nu}$ となることを表している．

4.6.6　空間平均操作の性質

ところで，この空間平均 $\langle\ \rangle$ に対して

$$\text{共変微分が交換する} \ : \langle h_{\rho\sigma}h_{\mu\nu|\alpha\beta}\rangle = \langle h_{\rho\sigma}h_{\mu\nu|\beta\alpha}\rangle, \tag{4.120}$$

$$\text{全微分の形の量の平均は 0} \ : \langle (h_{\rho\sigma|\alpha}h_{\mu\nu})_{|\beta}\rangle = 0$$

$$\Longleftrightarrow \text{部分積分を自由に行える} \ : \langle h_{\rho\sigma|\alpha}h_{\mu\nu|\beta}\rangle = -\langle h_{\rho\sigma|\alpha\beta}h_{\mu\nu}\rangle \tag{4.121}$$

が成り立つ (上であげた式はあくまでその性質の一例である)．(4.120) 式を示すためには，まず

$$
\begin{aligned}
h_{\mu\nu|\alpha\beta} &= h_{\mu\nu|\alpha,\beta} - h_{\rho\nu|\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta} - h_{\mu\rho|\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta} - h_{\mu\nu|\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\beta} \\
&= (h_{\mu\nu,\alpha} - h_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\alpha} - h_{\mu\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha})_{,\beta} \\
&\quad - (h_{\rho\nu,\alpha} - h_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\alpha} - h_{\rho\gamma}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \nu\alpha})\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta} \\
&\quad - (h_{\mu\rho,\alpha} - h_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \mu\alpha} - h_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\alpha})\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta} - h_{\mu\nu|\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\beta} \\
&= \underbrace{h_{\mu\nu,\alpha\beta}}_{\equiv \mathrm{s0}} - \underbrace{h_{\rho\nu,\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\alpha}}_{\equiv \mathrm{s11}} - h_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\alpha,\beta} - \underbrace{h_{\mu\rho,\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha}}_{\equiv \mathrm{s21}} - h_{\mu\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha,\beta} \\
&\quad - \underbrace{h_{\rho\nu,\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta}}_{\equiv \mathrm{s12}} + h_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta} + \underbrace{h_{\rho\gamma}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \nu\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta}}_{\equiv \mathrm{s31}} \\
&\quad - \underbrace{h_{\mu\rho,\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta}}_{\equiv \mathrm{s22}} + \underbrace{h_{\gamma\rho}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \mu\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta}}_{\equiv \mathrm{s32}} + h_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta} \\
&\quad - \underbrace{h_{\mu\nu|\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \alpha\beta}}_{\equiv \mathrm{s4}}
\end{aligned}
\tag{4.122}
$$

とすれば，$s0$, $s11+s12$, $s21+s22$, $s31+s32$, $s4$ はいずれも α と β の交換に対して対称となっていることに注意する．したがってそれら以外の項のみ考えると

$$
\begin{aligned}
&h_{\mu\nu|\alpha\beta} - h_{\mu\nu|\beta\alpha} \\
&= -h_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\alpha,\beta} - h_{\mu\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha,\beta} + h_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta} + h_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\alpha}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta} \\
&\quad + h_{\rho\nu}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\beta,\alpha} + h_{\mu\rho}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\beta,\alpha} - h_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \mu\alpha} - h_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma(0)}_{\ \rho\beta}\Gamma^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha} \\
&= h_{\mu\rho}R^{\rho(0)}_{\ \nu\alpha\beta} + h_{\rho\nu}R^{\rho(0)}_{\ \mu\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{4.123}
$$

となるので，(4.123) 式は $O(h/\mathscr{R}^2)$．一方，$h_{\mu\nu,\alpha\beta} = O(h/\lambda^2)$ なので，共変微分の非可換性に起因する項は相対的に $(\lambda^2/\mathscr{R}^2)$ の大きさとなり無視できる．

また (4.121) 式は，共変微分と偏微分の差の項は偏微分の項との比が $O(\lambda/\mathscr{R})$ なので無視できること，および全体が座標の偏微分の形になっている項を λ より十分大きなスケールで空間平均すると 0 となること，の 2 つの性質から証明できる．

4.6.7 TT ゲージにおける重力波のエネルギー運動量擬テンソル

具体的に $h^{\mathrm{TT}}_{\mu\nu}$ が TT ゲージ条件：

$$
h^{\mathrm{TT}}_{\mu 0} = 0, \quad h^{\mathrm{TT}|\nu}_{\mu\nu} = 0, \quad h^{\mathrm{TT}} \equiv h^{\mathrm{TT}\mu}_{\ \ \ \ \mu} = 0
\tag{4.124}
$$

を満たすものとして，重力波のエネルギー運動量擬テンソルである (4.119) 式を計算してみよう．ただし，繁雑さを避けるため以下では TT ゲージを示す添字 TT は省略する．

$h^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0,\ h \equiv h^{\mu}_{\mu} = 0$ であるから (4.109) 式は

$$R^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha} + \frac{1}{2}h^{\mu\nu}(h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu}) + \frac{1}{2}h_{\beta}{}^{\mu|\nu}(h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu}). \tag{4.125}$$

(4.125) 式の第 2 項を空間平均すると

$$\frac{1}{2}\langle h^{\mu\nu}(h_{\mu\nu|\alpha\beta} + h_{\alpha\beta|\mu\nu} - h_{\mu\alpha|\beta\nu} - h_{\mu\beta|\alpha\nu})\rangle = -\frac{1}{2}\langle h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle - \frac{1}{2}\langle \underbrace{h^{\mu\nu}{}_{|\nu}}_{=0}(h_{\alpha\beta|\mu} - h_{\mu\alpha|\beta} - h_{\mu\beta|\alpha})\rangle. \tag{4.126}$$

次に (4.125) 式の第 3 項の空間平均は

$$\frac{1}{2}\langle h_{\beta}{}^{\mu|\nu}(h_{\alpha\mu|\nu} - h_{\nu\alpha|\mu})\rangle = -\frac{1}{2}\langle h_{\beta}{}^{\mu}h_{\alpha\mu|\nu}{}^{\nu}\rangle + \frac{1}{2}\langle \underbrace{h_{\beta}{}^{\mu}{}_{|\mu\nu}}_{=0}h_{\nu\alpha}\rangle. \tag{4.127}$$

ここで，TT ゲージの場合，(4.103) 式と (4.115) 式より

$$R^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\mu\alpha|\beta}{}^{\mu} + h_{\mu\beta|\alpha}{}^{\mu} - h_{|\alpha\beta} - h_{\alpha\beta|\mu}{}^{\mu}) = -\frac{1}{2}h_{\alpha\beta|\mu}{}^{\mu} = 0 \tag{4.128}$$

となるから，$h_{\alpha\beta|\mu}{}^{\mu} = 0$. したがって (4.127) 式は結局 0 となる．以上をまとめると，(4.125) 式の空間平均は

$$\langle R^{(2)}_{\alpha\beta}\rangle = \frac{1}{4}\langle h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle - \frac{1}{2}\langle h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle = -\frac{1}{4}\langle h^{\mu\nu}{}_{|\beta}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle. \tag{4.129}$$

これより

$$\langle R^{(2)}\rangle = \langle R^{\alpha}{}_{\alpha}^{(2)}\rangle = -\frac{1}{4}\langle h^{\mu\nu|\alpha}h_{\mu\nu|\alpha}\rangle = \frac{1}{4}\langle h^{\mu\nu}h_{\mu\nu|\alpha}{}^{\alpha}\rangle = 0. \tag{4.130}$$

ただし最後の等号で (4.128) 式を用いた．これらを (4.119) 式に代入すると

$$t^{\mathrm{GW}}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi}\langle h^{\mathrm{TT}}_{\alpha\beta}{}_{|\mu}h^{\mathrm{TT}\ \alpha\beta}{}_{|\nu}\rangle = \frac{1}{32\pi}\langle h^{\mathrm{TT}}_{ij}{}_{|\mu}h^{\mathrm{TT}\ ij}{}_{|\nu}\rangle \tag{4.131}$$

となる．これが重力波のエネルギー運動量擬テンソルに対するアイザックソンの式である．

4.7 重力波輻射の 4 重極公式

アイザックソンの式 (4.131) を用いて，ニュートン力学的な重力波源からの輻射を具体的に計算してみよう．まず，弱場近似をする前のアインシュタイン方程式は

$$\Box \overline{h}^{\mu\nu} = -16\pi G \left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right), \tag{4.132}$$

$$\overline{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \tag{4.133}$$

と書ける．(4.132) 式の右辺の $t^{\mu\nu}$ は，$\overline{h}^{\mu\nu}$ に関する 2 次以上の高次項をすべてとりこんだものであると考える．その遅延解は (4.22) 式にある通り

$$\overline{h}^{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) = 4G \int \frac{\left[T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right](t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|, \boldsymbol{x'})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|}\, d^3x' \tag{4.134}$$

となる．これは，$\overline{h}^{\mu\nu}$ に関する 2 次以上の項を無視した (4.21) 式とは異なり ($t^{\mu\nu}$ は $O(h^2)$ となるのでそこでは無視されていた)，$\overline{h}^{\mu\nu}$ に関する積分方程式となっている．

4.7.1 重力波の遅延解と質量分布の 4 重極モーメント

重力波源となる領域の大きさを R とし，そこから $r = |\boldsymbol{x}|$ ($\gg R$) だけ離れた場所での重力波の振幅を考えてみる．この場合，(4.134) 式は

$$\overline{h}^{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{4G}{r} \int \left[T^{\mu\nu}(t - r, \boldsymbol{x'}) + t^{\mu\nu}(t - r, \boldsymbol{x'})\right]\, d^3x' \tag{4.135}$$

と近似できる．この式に $t^{\mu\nu}_{\mathrm{MTW}}$ の場合に成り立つ

$$\left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0 \tag{4.136}$$

を適用して変形すれば

$$\overline{h}^{jk}(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{2G}{r} \frac{d^2 I^{jk}(t - r)}{dt^2}, \tag{4.137}$$

$$I^{jk}(t - r) \approx \int T^{00}(t - r, \boldsymbol{x'}) x'^j x'^k\, d^3x' \tag{4.138}$$

を得る．ここで，I^{jk} は考えている領域の質量分布の 4 重極モーメントである．

(4.137) 式は以下のようにして証明できる．まず，(4.136) 式を繰り返し用いて

$$\begin{aligned}\left(T^{00} + t^{00}\right)_{,00} &= -\left[\left(T^{0l} + t^{0l}\right)_{,l}\right]_{,0} = -\left[\left(T^{l0} + t^{l0}\right)_{,0}\right]_{,l} \\ &= \left(T^{lm} + t^{lm}\right)_{,ml} \ .\end{aligned} \tag{4.139}$$

したがって，

$$\left[\left(T^{00} + t^{00}\right) x^j x^k\right]_{,00} = \left(T^{lm} + t^{lm}\right)_{,ml} x^j x^k \tag{4.140}$$

となる．同様に変形すれば，

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(T^{lm}+t^{lm}\right)x^j x^k\right]_{,ml} \\
&=\left(T^{lm}+t^{lm}\right)_{,ml}x^j x^k+\left(T^{lm}+t^{lm}\right)_{,m}\left(\delta^j_l x^k+x^j\delta^k_l\right) \\
&\quad+\left(T^{lm}+t^{lm}\right)_{,l}\left(\delta^j_m x^k+x^j\delta^k_m\right)+\left(T^{lm}+t^{lm}\right)\left(\delta^j_m\delta^k_l+\delta^j_l\delta^k_m\right) \\
&=\left[\left(T^{00}+t^{00}\right)x^j x^k\right]_{,00}+2\left[\left(T^{lj}+t^{lj}\right)x^k+\left(T^{lk}+t^{lk}\right)x^j\right]_{,l} \\
&\quad-2\left(T^{jk}+t^{jk}\right).
\end{aligned}
\tag{4.141}
$$

(4.141) 式の両辺を体積積分すると，左辺，および右辺第 2 項はガウスの定理より表面積分に帰着し 0 となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\bar{h}^{jk}(t,\boldsymbol{x}) &\approx \frac{4G}{r}\int\left(T^{jk}+t^{jk}\right)\,d^3x' \\
&=\frac{2G}{r}\frac{d^2}{dt^2}\int\left[T^{00}(t-r,\boldsymbol{x}')+t^{00}(t-r,\boldsymbol{x}')\right]x'^j x'^k\,d^3x' \\
&\approx\frac{2G}{r}\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00}(t-r,\boldsymbol{x}')x'^j x'^k\,d^3x' \\
&=\frac{2G}{r}\frac{d^2 I^{jk}(t-r)}{dt^2}
\end{aligned}
\tag{4.142}
$$

となり，(4.137) 式が導かれた．

4.7.2 質量分布の換算 4 重極モーメント

さらに，質量分布の 4 重極モーメントである I_{jk} のトレースフリー成分：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{I}_{jk}(t-r) &\equiv I_{jk}-\frac{1}{3}\delta_{jk}I \\
&=\int T^{00}(t-r,\boldsymbol{x}')\left(x'_j x'_k-\frac{1}{3}\delta_{jk}r'^2\right)\,d^3x'
\end{aligned}
\tag{4.143}
$$

を定義する (質量分布の換算 4 重極モーメントと呼ばれることがある)．I_{jk} と $\mathscr{I}_{jk}$ は，本質的には同じ物理量である．ただし，$\mathscr{I}_{jk}$ はニュートンポテンシャルを展開したときに現れる係数：

$$
\phi(\boldsymbol{x})=-G\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d\boldsymbol{x}'=-\frac{GM}{r}-\frac{3G}{2r^5}\mathscr{I}_{jk}x^j x^k+\cdots
\tag{4.144}
$$

そのものであるため，I_{jk} よりも便利なのである．

(4.144) 式は以下のようにして導かれる．まず，

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{1}{r} - x'^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}x'^j x'^k \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{r} + x'^j \frac{x_j}{r^3} + \frac{1}{2}x'^j x'^k \frac{3x_j x_k - \delta_{jk} r^2}{r^5} + \cdots \tag{4.145}$$

であるから (ミンコフスキー空間なので空間成分の添字はそのまま上げ下げできることを用いて),

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,d\boldsymbol{x}'$$

$$= -\frac{G}{r}\int \rho(\boldsymbol{x}')\,d\boldsymbol{x}' - \frac{Gx^j}{r^3}\int \rho(\boldsymbol{x}')x'_j\,d\boldsymbol{x}'$$

$$- \frac{3G}{2r^5}\int \rho(\boldsymbol{x}')x'_j x'_k \left(x^j x^k - \frac{1}{3}\delta^{jk} r^2\right) d\boldsymbol{x}' + \cdots . \tag{4.146}$$

(4.146) 式の右辺第 1 項の積分は重力波源の全質量 M を与える．第 2 項の積分は重力波源の 2 重極モーメント d_j を与えるが，原点を重心にとることでこの項は常に 0 とすることができる．最後に第 3 項の積分は

$$\int \rho(\boldsymbol{x}')x'_j x'_k \left(x^j x^k - \frac{1}{3}\delta^{jk} r^2\right) d\boldsymbol{x}' = x^j x^k \int \rho(\boldsymbol{x}') \left(x'_j x'_k - \frac{1}{3}\delta_{jk} r'^2\right) d\boldsymbol{x}'$$

$$\equiv x^j x^k \mathscr{I}_{jk} \tag{4.147}$$

と変形できて，(4.143) 式で定義された質量分布の換算 (reduced) 4 重極モーメント $\mathscr{I}_{jk}$ で書き下される．以上をまとめて (4.144) 式を得る．

4.7.3 TT ゲージ化

しかし (4.137) 式はまだ，4.2.1 節で述べた TT ゲージになっていない．一般のテンソルを TT ゲージ化することは難しいが，$h_{jk} \propto \exp(ik_\alpha x^\alpha)$ のように平面波で展開される場合には，以下のように具体的に実行可能である[10]．

まず次式で定義される演算子：

$$P_{lm} \equiv \delta_{lm} - \hat{k}_l \hat{k}_m \quad \left(\hat{k}_l \equiv \frac{k_l}{\sqrt{k^i k_i}} = \frac{k_l}{k}\right) \tag{4.148}$$

を考える[11]．このとき，

---

10) 本節の議論は C.W.Misner, K.S.Thorne & J.A.Wheeler “Gravitation” (W.H.Freeman, 1972) §35.4 にしたがっている．

11) この演算子の添字は空間成分だけなので，その上げ下げは δ^{ij} と δ_{ij} を用いて行うものとする．

$$\hat{k}^l P_l{}^m = \hat{k}^l \delta_l{}^m - (\hat{k}^l \hat{k}_l)\hat{k}^m = \hat{k}^m - \hat{k}^m = 0 \tag{4.149}$$

が成り立つから $P_i{}^l$ を添字 i のベクトルとみなせば，これは $\hat{k}^i$ と直交している．したがって，$P_i{}^l P_j{}^m h_{lm}$ は $\hat{k}^i$ と $\hat{k}^j$ のいずれとも直交することになる．

さらにこの演算子が満たす関係式：

$$\begin{aligned} P_j{}^l P^{jm} &= (\delta_j^l - \hat{k}_j \hat{k}^l)(\delta^{jm} - \hat{k}^j \hat{k}^m) \\ &= \delta^{lm} - \hat{k}^l \hat{k}^m - \hat{k}^m \hat{k}^l + \hat{k}^l \hat{k}^m = \delta^{lm} - \hat{k}^l \hat{k}^m = P^{lm} \end{aligned} \tag{4.150}$$

を用いると，$P_i{}^l P_j{}^m h_{lm}$ のトレースは

$$P_j{}^l P^{jm} h_{lm} = P^{lm} h_{lm} \tag{4.151}$$

となる．

以上より，

$$h_{ij}^{\rm TT} = P_i{}^k P_j{}^l h_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} h_{kl} \tag{4.152}$$

と定義すれば，$\hat{k}^i$ と $\hat{k}^j$ のいずれとも直交し，かつトレースが 0 のテンソルとなっていることがわかる[12]．これが平面波 $\exp(ik_\alpha x^\alpha)$ で展開される h_{ij} を TT ゲージ化する表式にほかならない．

(4.152) 式に (4.137) 式を代入すれば，

$$h_{ij}^{\rm TT} = \bar{h}_{ij}^{\rm TT} = \frac{2G}{r} \ddot{\mathscr{I}}_{ij}^{\rm TT} = \frac{2G}{r} \left(P_i{}^k P_j{}^l \ddot{\mathscr{I}}_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \ddot{\mathscr{I}}_{kl} \right) \tag{4.153}$$

が得られる．

4.7.4 重力波のエネルギー放出率

これらを用いて重力波のエネルギー運動量の擬テンソル $t_{\mu\nu}^{\rm GW}$ を具体的に書き下してみよう．まず (4.153) 式をアイザックソンの式 (4.131) に代入すると，

$$\langle t^{\rm GW00} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{\rm TT}\ \dot{h}^{\rm TT\ ij} \rangle = \frac{G}{8\pi r^2} \langle \dddot{\mathscr{I}}_{ij}^{\rm TT}\ \dddot{\mathscr{I}}^{\rm TT\ ij} \rangle \tag{4.154}$$

となる．右辺の括弧内は

$$\begin{aligned} &\dddot{\mathscr{I}}_{ij}^{\rm TT}\ \dddot{\mathscr{I}}^{\rm TT\ ij} \\ &= \Bigg(P_i{}^m P_j{}^l \dddot{\mathscr{I}}_{ml} - \frac{1}{2} P_{ij} \underbrace{P^{ml} \dddot{\mathscr{I}}_{ml}}_{\equiv I\ \text{とおく}} \Bigg) \Bigg(P^{im'} P^{jl'} \dddot{\mathscr{I}}_{m'l'} - \frac{1}{2} P^{ij} \underbrace{P^{m'l'} \dddot{\mathscr{I}}_{m'l'}}_{=I} \Bigg) \end{aligned}$$

---

12) $P_l{}^l = \delta_l{}^l - \hat{k}_l \hat{k}^l = 3 - 1 = 2$ に注意．

$$
\begin{aligned}
&= P^{mm'}P^{ll'}\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{m'l'} - I\underbrace{P^{m'l'}\dddot{\mathscr{I}}_{m'l'}}_{=I} + \frac{1}{4}I^2\underbrace{P_{ij}P^{ij}}_{=P_i{}^i=2} \\
&= P^{mm'}P^{ll'}\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{m'l'} - \frac{1}{2}I^2.
\end{aligned}
\tag{4.155}
$$

さらに

$$
I = P^{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{ml} = (\delta^{ml} - \hat{k}^m\hat{k}^l)\dddot{\mathscr{I}}_{ml} = \underbrace{\dddot{\mathscr{I}}^m{}_m}_{=0} - \hat{k}^m\hat{k}^l\dddot{\mathscr{I}}_{ml} \tag{4.156}
$$

と

$$
\begin{aligned}
P^{mm'}P^{ll'}\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{m'l'} &= (\delta^{mm'} - \hat{k}^m\hat{k}^{m'})(\delta^{ll'} - \hat{k}^l\hat{k}^{l'})\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{m'l'} \\
&= \dddot{\mathscr{I}}^{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{ml} - 2\hat{k}^m\hat{k}^{m'}\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{m'}{}^l \\
&\quad + \underbrace{(\hat{k}^m\hat{k}^l\dddot{\mathscr{I}}_{ml})^2}_{=I^2}
\end{aligned}
\tag{4.157}
$$

を (4.155) 式に代入すれば，最終的に

$$
\langle t^{\mathrm{GW}00}\rangle = \frac{G}{8\pi r^2}\left\langle \dddot{\mathscr{I}}^{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{ml} - 2\hat{k}^m\hat{k}^l\dddot{\mathscr{I}}_{mn}\dddot{\mathscr{I}}^n{}_l + \frac{1}{2}(\hat{k}^m\hat{k}^l\dddot{\mathscr{I}}_{ml})^2\right\rangle \tag{4.158}
$$

を得る．

$\mathscr{I}_{ij}^{\mathrm{TT}}$ は $t-r$ の関数であることに注意すると，r 方向の重力波のエネルギーフラックスは

$$
\begin{aligned}
\langle t^{\mathrm{GW}0r}\rangle &= \frac{G}{8\pi r^2}\langle \ddot{\mathscr{I}}_{ij}^{\mathrm{TT},0}\ \ddot{\mathscr{I}}^{\mathrm{TT}\ ij,m}\hat{k}_m\rangle \\
&= -\frac{G}{8\pi r^2}\left\langle \dddot{\mathscr{I}}_{ij}^{\mathrm{TT}}\ \dddot{\mathscr{I}}^{\mathrm{TT}\ ij}\hat{k}^m\hat{k}_m\right\rangle = -\langle t^{\mathrm{GW}00}\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.159}
$$

これより，重力波のエネルギー放出率は

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{\mathrm{GW}}}{dt} &= -\int \langle t^{\mathrm{GW}0r}\rangle r^2\, d\Omega \\
&= \frac{G}{8\pi}\int d\Omega\left\langle \dddot{\mathscr{I}}^{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{ml} - 2\hat{k}^m\hat{k}^l\dddot{\mathscr{I}}_{mn}\dddot{\mathscr{I}}^n{}_l + \frac{1}{2}(\hat{k}^m\hat{k}^l\dddot{\mathscr{I}}_{ml})^2\right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.160}
$$

となる．ここで，

$$
\int d\Omega\, \hat{k}^m\hat{k}^l = \frac{4\pi}{3}\delta^{ml}, \tag{4.161}
$$

$$
\int d\Omega\, \hat{k}^i\hat{k}^j\hat{k}^m\hat{k}^l = \frac{4\pi}{15}\left(\delta^{ij}\delta^{ml} + \delta^{im}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jm}\right) \tag{4.162}
$$

という関係を用いれば，(4.160) 式は

$$\frac{dE_{\mathrm{GW}}}{dt} = \frac{G}{8\pi}\left(4\pi - 2\times\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2}\frac{4\pi}{15}\times 2\right)\langle \dddot{\mathscr{I}}^{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\rangle$$
$$= \frac{G}{5c^5}\langle \dddot{\mathscr{I}}^{ml}\dddot{\mathscr{I}}_{ml}\rangle \tag{4.163}$$

となる (念のため 2 つめの等号の後に，今まで 1 としてきた光速度 c を用いて単位をそろえておいた)．この結果は，重力波放射の 4 重極公式として知られている．この結果からオーダーだけを見積もると

$$\frac{dE_{\mathrm{GW}}}{dt} \sim \frac{G}{c^5}\left(\frac{MR^2}{T^3}\right)^2 \sim \underbrace{\frac{c^5}{G}}_{\approx 3.6\times 10^{59}\mathrm{erg/s}}\left(\frac{GM}{Rc^2}\right)^2\left(\frac{R/T}{c}\right)^6 \tag{4.164}$$

となる．右辺に登場している 2 つの因子はいずれもとても小さい．たとえば，同質量 M をもつ 2 質点が互いにケプラー運動しているとすれば

$$2GM \approx \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R^3 \Longrightarrow \frac{dE_{\mathrm{GW}}}{dt} \sim 10^{26}L_\odot\left(\frac{GM}{c^3T}\right)^{10/3}$$
$$\sim 10^{-7}L_\odot\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{10/3}\left(\frac{10\text{ 時間}}{T}\right)^{10/3} \tag{4.165}$$

となり，重力波が放出するエネルギーの小ささがわかる．ここで $L_\odot$ は太陽の放射エネルギーで，$\approx 4\times 10^{33}\mathrm{erg\cdot s^{-1}}$ (例題 H 参照)．

第5章

重力レンズ天文学

遠方の天体からの光は我々に到達するまでに，宇宙の非一様な物質分布の影響でその経路が複雑に弯曲する．これは重力のために空間が歪む結果であり，重力レンズ効果と呼ばれる．重力レンズは遠方天体自身が観測目的である場合には，その信号に対する雑音の役割をする．一方，遠方天体の光を用いて経路にある物質分布を探るという立場に立つと，それ自身が重要な宇宙の情報源 = 信号となる．天文学は光輝く天体を観測するのが普通であるが，それらが受けた重力の影響を通じて (必ずしも光ってはいない) 物質の分布までも知ることができるのが重力レンズ天文学のユニークな点である．重力レンズの観測自体はきわめて困難であるため，従来は，どちらかといえば珍しく興味深い現象という観点からの研究が主であった．しかしながら観測技術の向上にともない，現在では天文学における重要な観測手法の 1 つという地位を確立しており，さまざまな研究に応用されている．

5.1　重力レンズの分類

一般に光が重力場のもとで曲がる現象が重力レンズだが，その特徴に応じてさらに次の 3 つに分類されることが多い．

(i) 強い重力レンズ： 特に強い重力ポテンシャルを受けた場合には，遠方天体からの光が複数の異なる経路を通って観測者に到達することがある．その結果，同一の天体に対して，見かけ上複数の分離した像が観測される．これを強い重力レンズと呼ぶ．ほぼ点光源とみなしてよい遠方のクエーサーが途中の銀河の強い重力レンズ効果によって多重像として観測されている例は，すでに 100 個ほど報告されている．

(ii) 弱い重力レンズ： 星やクエーサーとは異なり，銀河は点光源ではなく有限の広がりを持っている．この場合，銀河の異なる場所から出た光は若干異なる重力レンズ効果を受けるため，観測される銀河の形状が本来のものに比べて歪む．これを弱い重力レンズと呼ぶ．じつは本来の銀河の形はわからないため，1 個の銀河を観測しただけでは，重力レンズ効果による変形の度合を抜き出すことはできない．しかしある銀河団の回りにある多数の背景銀河の形状を統計的に解析すれば，その系統的な歪みの成分から弱い重力レンズ効果を検出することができる．それから逆に，レンズ効果を及ぼす天体である銀河団の重力ポテンシャルを推定できる．

(iii) 重力マイクロレンズ： 多重像ができるということはそれらを足しあわせれば，重力レンズを受けていない場合に比べてより明るくなることが予想できる．とすれば分離角が小さいため分離した複数像として観測されない場合でも，天体の明るさは重力レンズ効果によって変化しているはずだ．特に，銀河系内の暗い天体が背景星の手前を横切る場合にはこの明るさの変化が時系列として観測できるであろう．これを (重力) マイクロレンズと呼ぶ．

本章では，主として (i) と (iii) について議論する．その前に，これらが天文学的なツールとして応用されている例をいくつか列挙しておこう．

(a) ダークマター分布マッピング： 強い重力レンズあるいは弱い重力レンズを用いて観測を再現するようなレンズ天体の質量分布を構築することで，直接は観測できないダークマター分布をマッピングできる．

(b) 宇宙論パラメータ推定： 強い重力レンズを起こす確率は宇宙論パラメータ，特に宇宙定数の値に強く依存する．観測されている強い重力レンズ現象の頻度を理論予言と比較することで，宇宙論パラメータを推定することができる．

(c) 宇宙の距離指標： 強い重力レンズによる多重像は異なる経路を通っているので，観測者までの到達時間も異なる．つまり，現在観測されている多重像は異なる時刻で見た同じ天体に対応する．天体の光度が時間変動を示す場合には，多重像間の到達時間差を推定することができ，これを理論と比較することで，宇宙の大きさを特徴づける唯一のパラメータであるハッブル定数を推定できる．

(d) 自然の望遠鏡： 重力レンズを受けた天体は，結果としてより明るく観測される．したがって，本来は暗くて観測が困難な遠方の天体であっても，重力レンズの効果のおかげで観測できるようになる．

(e) 銀河系内ダークマター候補天体探査： マイクロレンズ現象を利用して銀河系内のダークマター候補となる暗い天体 (MAssive Compact Halo Object : MACHO)[1]を探査することができる．1986 年，プリンストン大学のボーダン・パチンスキーは，重力マイクロレンズ効果を用いて，我々の銀河系を満たしているかもしれない $(10^{-6} \sim 100)M_\odot$ の MACHO を検出する巧妙な方法を提案した．銀河系内の MACHO 天体は静止しているわけではなく，平均的には 200km/sec 程度の速度でランダムに運動している．それらが背景星と地球とを結ぶ線上 (のごく近傍) を横切る際には，重力レンズを起こし，1 カ月程度その星がより明るく輝いて見えるはずだ．その頻度から逆に，MACHO 天体の存在量を推定できる．

(f) 太陽系外惑星探査： 重力マイクロレンズ効果はもちろん MACHO 天体のみならず普通の星によっても引き起こされる．この場合，その星が惑星を伴っている場合には，特徴的な光度時間変化を示す．2010 年 1 月時点で，この方法によって 10 個程度の太陽系外惑星が発見されている．

5.2 レンズ方程式

重力レンズの基本方程式であるレンズ方程式は，形式的には簡単に導くことができる．図 5.1 のように観測者 O, ソース天体 S, レンズ像 I あるいは I′ の位置を定義する．重力レンズを引き起こすレンズ天体 L はレンズ面上にだけ局在しており，光線はこの平面を通るときにだけ瞬間的に角度 $\boldsymbol{\alpha}$ だけ曲げられるものと考える (薄いレンズ近似 : thin lens approximation)．ソース面上での角度の原点 L′ の位置は任意に選んでよいのだが，とりあえずレンズ天体の中心の位置をソース面に延長した場所に設定しておく．

ここで $\overrightarrow{\mathrm{L'O}}$ 向きの単位ベクトルを $\hat{z}$ とし，2 次元角度ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}$ と $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{LI}} \equiv D_{\mathrm{OL}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{L'S}} \equiv D_{\mathrm{OS}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}} \tag{5.1}$$

によって定義する[2]．このとき，光線の曲がり角ベクトル $\boldsymbol{\alpha}$ を既知とすれば，図 5.1 から明らかなように

$$\overrightarrow{\mathrm{SL'}} + \overrightarrow{\mathrm{L'I'}} = \overrightarrow{\mathrm{SI'}} \Longrightarrow D_{\mathrm{OS}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}) = D_{\mathrm{LS}}\boldsymbol{\alpha} \tag{5.2}$$

---

[1] ダークマターの候補の 1 つであり，MAssive Compact Halo Object (重くコンパクトなハロー天体) という英語の頭文字から MACHO (マチョ) というあだ名で呼ばれている．もともとはスペイン語で，男性的なという意味の形容詞，あるいはたくましい男という意味の名詞である．

[2] もちろん直接観測できるのは $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}$ だけであり (一般には複数個ある)，$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}$ は観測できない．

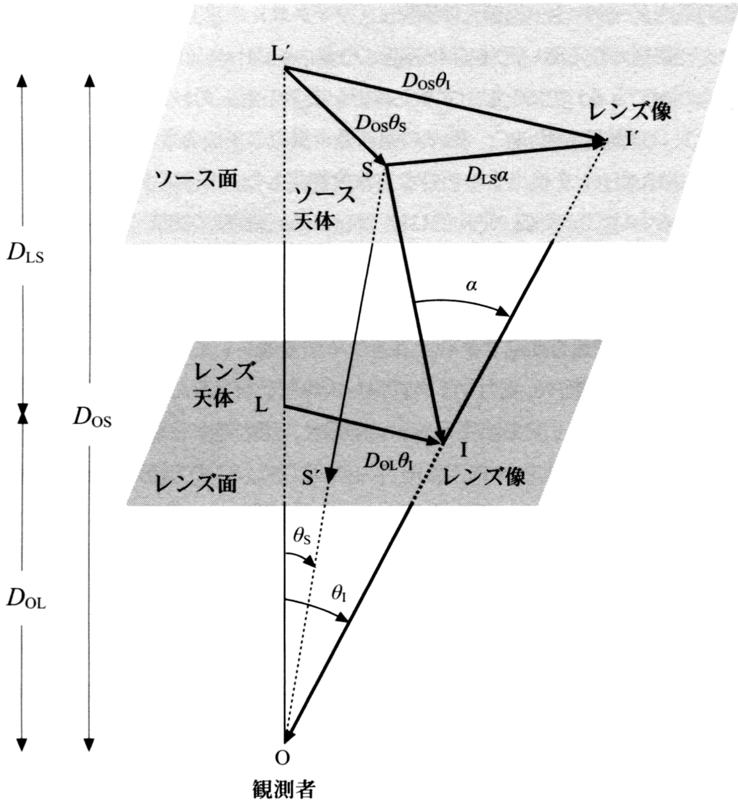


図 5.1　重力レンズの概念図．観測者とレンズ面との距離を $D_{\rm OL}$，観測者とソース面との距離を $D_{\rm OS}$，レンズ面とソース面の距離を $D_{\rm LS}$ とする．

が成り立つ．これがレンズ方程式である．(5.2) 式は $\boldsymbol{\theta}_{\rm I} = \boldsymbol{\theta}_{\rm I}(\boldsymbol{\theta}_{\rm S})$ に対する方程式であるが，むろんこのままでは解くことができない．そのためには，光線の曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ を $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ の関数としてあらかじめ計算しておく必要がある．その表式を次節で考えてみよう．

5.3　光線の曲がり角

5.3.1　重力場中で光線が曲がる理由

まず光線が曲がるということを定性的に考察してみる．コンパクト天体のごく近傍を考えない限り，レンズ面上での計量は弱場近似の形：

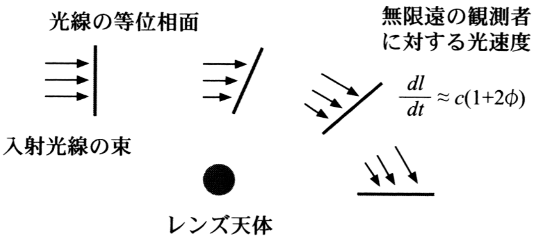


図 5.2 重力場のもとでの光線の湾曲の定性的理解.

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -(1+2\phi)\,dt^2 + (1-2\phi)\delta_{ij}\,dx^i dx^j \\
&\equiv -(1+2\phi)\,dt^2 + (1-2\phi)\,d\ell^2
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

を用いることができる. ここで ϕ (< 0) はニュートンポテンシャルで, $|\phi| \ll 1$ かつ時間には依存しないものとしておく.

重力場のもとで光が曲がる理由は以下のように定性的に理解できる. まず, 光はヌルの測地線 $(ds^2 = 0)$ に沿って進むので, (5.3) 式の計量において, 無限遠にいる観測者に対する光の「座標速度」は

$$
ds^2 = 0 \Longrightarrow \frac{d\ell}{dt} = \sqrt{\frac{1+2\phi}{1-2\phi}} \tag{5.4}
$$

となる. これを通常の光学に対応させれば, 屈折率

$$
n \equiv \sqrt{\frac{1-2\phi}{1+2\phi}} \approx 1 - 2\phi \ (> 1) \tag{5.5}
$$

の媒質中の光速度 $c' = c/n$ とみなすことができる. 図 5.2 に示すように, レンズ天体に近いほど $|\phi|$ が大きく屈折率は高くなるので, 光速度 c' は小さくなる. したがって, レンズ天体の周辺を進む光線束はレンズ天体に近いほど遅く進むため, 等位相面が傾く. この光線束の進路は等位相面の法線方向であるから, 図 5.2 に示すよう光線が曲がることになる. もちろん, 光もまた重力を感じてレンズ天体の側に引き寄せられるという言い方も可能であるが, 一般相対論は「重力は力ではない」という思想であるから, 時空が歪むことによって実効的な屈折率が生じ, その結果光の測地線が曲がる, という上述の解釈の方がより適切かも知れない.

5.3.2　重力ポテンシャルと光線の曲がり角

次に，(5.3) 式の計量のもとでの曲がり角に対する具体的な表式を求めてみよう．光の 4 元波数ベクトルが

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{5.6}$$

となるようにアフィンパラメータ λ を定義して光の測地線を書き直すと (例題 I 参照),

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = 0. \tag{5.7}$$

図 5.3 のように座標系を設定する．光はソース天体を出発して観測者に到達するが，ここでは観測者を原点として逆の経路を考えることにする．むろんこれらは軌跡としては同じである．重力の効果を無視すれば光の経路は $\overrightarrow{\mathrm{OI}'}$ という直線となる．この測地線に対応する波数ベクトルは

$$k_0^\mu \approx (-1, \theta_{\mathrm{I},x}, \theta_{\mathrm{I},y}, 1) \quad (|\boldsymbol{\theta}_\mathrm{I}| \ll 1) \tag{5.8}$$

で与えられる．そこで，実際の測地線に対する波数ベクトルを

$$k^\mu(\lambda) = k_0^\mu + \delta k^\mu(\lambda) \quad (|\delta k^\mu(\lambda)| \ll 1) \tag{5.9}$$

とおいて，(5.7) 式を満たす $\delta k^\mu(\lambda)$ を摂動的に計算する．

(5.7) 式を摂動の最低次までとると，$i = 1$ または 2 として

$$\frac{d}{d\lambda}(\delta k^i) + \Gamma^i{}_{\alpha\beta} k_0^\alpha k_0^\beta = \frac{d}{d\lambda}(\delta k^i) + \Gamma^i{}_{00} + \Gamma^i{}_{33} = 0. \tag{5.10}$$

ここで，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とすると弱場近似 ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$) を用いて

$$\Gamma^i{}_{\alpha\beta} \approx \frac{\eta^{ij}}{2}(h_{j\alpha,\beta} + h_{j\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,j}). \tag{5.11}$$

さらに静的 ($h_{\mu\nu,0} = 0$) という条件より

$$\Gamma^i{}_{00} = \Gamma^i{}_{33} \approx -\frac{1}{2} h_{00,i} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}. \tag{5.12}$$

したがって (5.10) 式の解は

$$\delta k^i(\lambda) \approx -2 \int_0^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, d\lambda' \tag{5.13}$$

となる．

これを測地線に沿って積分すればソース天体の座標が得られる．

$$\underbrace{x^i(\lambda_s)}_{\equiv D_\mathrm{OS}\theta_\mathrm{S}^i} = \int_0^{\lambda_s} k^i(\lambda)\, d\lambda = \int_0^{\lambda_s} [k_0^i + \delta k^i(\lambda)] d\lambda$$

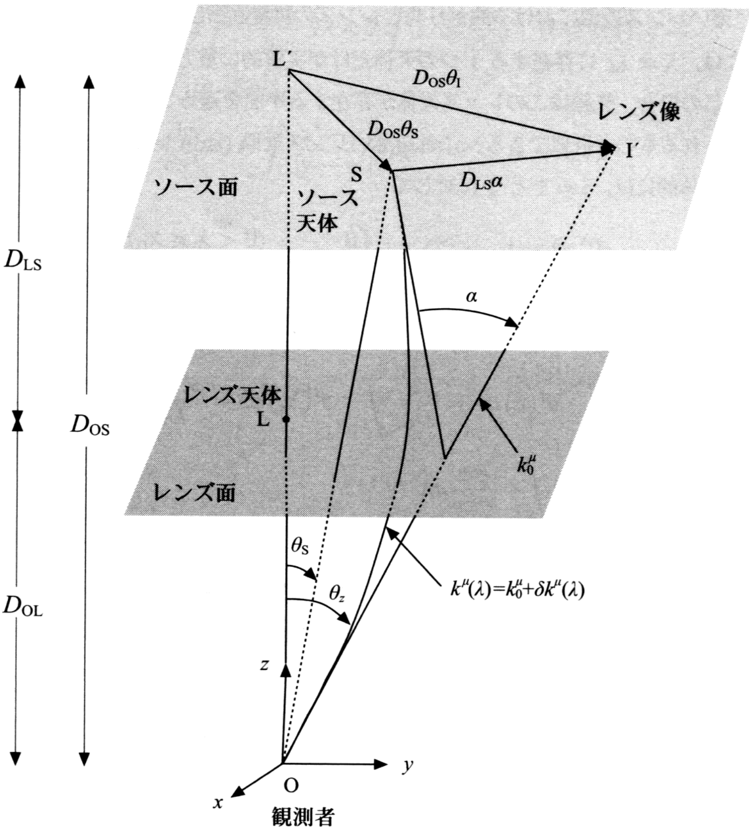


図 5.3 光の測地線と重力レンズ．光の測地線 $k^\mu(\lambda)$ に沿って測るアフィンパラメータのレンズ面とソース面での値をそれぞれ $\lambda_{\rm L}$, $\lambda_{\rm S}$ とする．

$$= \underbrace{\int_0^{\lambda_s} \theta_{\rm I}^i \, d\lambda}_{\equiv D_{\rm OS}\theta_{\rm I}^i} - \underbrace{2\int_0^{\lambda_s} d\lambda \left(\int_0^{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \, d\lambda' \right)}_{\equiv D_{\rm LS}\alpha^i} . \tag{5.14}$$

これはまさにレンズ方程式 (5.2) であり，曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ が，測地線に沿った重力ポテンシャルの積分：

$$\alpha^i = \frac{2}{D_{\rm LS}} \int_0^{\lambda_s} d\lambda \left(\int_0^{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \, d\lambda' \right) \tag{5.15}$$

によって与えられることを示している．

5.3.3 薄いレンズ近似における曲がり角とレンズの質量面密度

一般には，$\lambda = \lambda_{\rm L}$ に存在する 1 つの天体だけが実質的に重力レンズに寄与することが多い．この場合，光線はこのレンズ天体が存在する平面を通るときに不連続に角度 $\boldsymbol{\alpha}$ だけ曲げられるものと近似できる．これを薄いレンズ近似 (thin lens approximation) と呼ぶ．具体的には，$i = 1$ と 2 に対して

$$\theta^i(\lambda) \equiv 2\int_0^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, d\lambda' \underbrace{=}_{\text{薄いレンズ近似}} \begin{cases} 0 & (0 < \lambda < \lambda_{\rm L}), \\ \theta^i(\lambda_s) & (\lambda_{\rm L} < \lambda < \lambda_{\rm S}) \end{cases} \tag{5.16}$$

と近似すれば，

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \frac{1}{D_{\rm LS}}\int_0^{\lambda_s} \theta^i(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{D_{\rm LS}}\int_{\lambda_{\rm L}}^{\lambda_s} \theta^i(\lambda_s)\, d\lambda = \frac{\theta^i(\lambda_s)}{D_{\rm LS}}\int_{\lambda_{\rm L}}^{\lambda_s} d\lambda \\ &= \theta^i(\lambda_s) = 2\int_0^{\lambda_s} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, d\lambda \end{aligned} \tag{5.17}$$

が得られる．

一方，光が通常の粒子と同様にニュートン重力を受けて経路が変わると考えるならば，図 5.3 の z 方向に進む光の曲がり角は，z 方向と直交した $i\ (= 1, 2)$ 方向の光の速度成分を考慮して

$$\alpha^i_{\rm Newton} \approx \frac{\delta v^i(\lambda_s)}{c} = \int_0^{\lambda_s} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, d\lambda \tag{5.18}$$

で与えられることが期待される．しかしこの値は (5.17) 式の半分でしかない．これは言わば屈折率と呼ぶべき (5.5) 式の ϕ の前の係数が 2 であることに対応している[3)]．このことからも,「光」が重力を感じるために曲がるという説明よりも,「時空」が光線に対する実効的な屈折率をもつ，という説明の方がより適切であることがわかる．

さらに重力ポテンシャルを具体的に書き下すことで，(5.17) 式をレンズ天体の質量密度によって表してみる．物質の 3 次元質量密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ とすると，(4.25) 式と同じく

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \Longrightarrow \phi(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, d\boldsymbol{r}'. \tag{5.19}$$

レンズ天体が存在するレンズ面を $z = 0$ に選び直せば，薄いレンズ近似の場合

---

3) これがニュートン理論で計算したときに，太陽表面を通過する光の曲がり角が一般相対論の予言の 1/2 となる理由でもある．有名なエディントンの観測は，光が曲がるかどうかの検証ではなく，この係数の 2 倍の違いの有無を検証するものであった (『入門』5.4.3 節)．

$$\alpha^i = 2\int_0^{\lambda_s} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, d\lambda \approx 2\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (i=1,2) \tag{5.20}$$

と置き換えてよい．(5.19) 式から

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = G\int \frac{x^i - x'^i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\rho(\boldsymbol{r'})\, d\boldsymbol{r'} \quad (i=1,2) \tag{5.21}$$

なので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = G\int (x^i - x'^i)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3}\right)\rho(\boldsymbol{r'})\, d\boldsymbol{r'}. \tag{5.22}$$

この被積分関数に含まれている z に関する積分の項は，積分公式：

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2\sqrt{z^2+a^2}} \quad (a \text{ は定数}) \tag{5.23}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|^3} \\
&= \frac{1}{(x-x')^2+(y-y')^2}\ \frac{z-z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{2}{(x-x')^2+(y-y')^2}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

となるので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 2G\iint dx'dy'\, \frac{x^i - x'^i}{(x-x')^2+(y-y')^2} \times \int dz' \rho(x',y',z'). \tag{5.25}$$

ここで，2 次元質量面密度：

$$\Sigma(x',y') \equiv \int dz'\, \rho(x',y',z') \tag{5.26}$$

および次式で定義される角度 $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ と $\boldsymbol{\theta}$：

$$D_{\rm OL}\boldsymbol{\theta}_{\rm I} \equiv (x,y), \quad D_{\rm OL}\boldsymbol{\theta} \equiv (x',y') \tag{5.27}$$

を用いれば，(5.20) 式は最終的に

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = \frac{4GD_{\rm OL}}{c^2}\int \Sigma(\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-\boldsymbol{\theta}|^2}\, d\boldsymbol{\theta} \tag{5.28}$$

となる．これは，曲がり角をレンズ面上の質量面密度と結びつける重要な公式である．

5.4 レンズポテンシャルとレンズ方程式

レンズ方程式 (5.2) の右辺を

$$\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}_{\rm S} \equiv \nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}} \Psi = \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}} \boldsymbol{\alpha} \tag{5.29}$$

と書き直すことによって，レンズ面上でのレンズポテンシャル Ψ を定義する．曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ に対する (5.28) 式を用いれば

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = \frac{1}{\pi \Sigma_{\rm c}} \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \ln |\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}| \, d\boldsymbol{\theta}, \tag{5.30}$$

$$\Sigma_{\rm c} \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_{\rm OS}}{D_{\rm OL} D_{\rm LS}} \approx 1.7 \times 10^{15} \left(\frac{1 \rm Gpc}{D_{\rm OL} D_{\rm LS} / D_{\rm OS}} \right) M_{\odot} \rm Mpc^{-2} \tag{5.31}$$

という表式が得られる (例題 J も参照のこと)．$\Sigma_{\rm c}$ は臨界面密度 (critical surface mass density) と呼ばれ，ソース天体が重力レンズを起こすためにレンズ面で必要となる典型的な面密度の値を与える．

(5.30) 式の積分の中は 2 次元ラプラシアンに対するグリーン関数[4]との畳み込みになっていることから，レンズポテンシャルは

$$\Delta^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}} \Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = 2 \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}_{\rm I})}{\Sigma_{\rm c}} \tag{5.32}$$

を満たすことがわかる (以下では 2 次元ラプラシアンを単に $\Delta_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}$ と記す)．

じつは，レンズポテンシャルは 3 次元の重力ポテンシャルを視線方向に積分した

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = 2 \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OL} D_{\rm OS}} \int \phi \, d\ell \tag{5.33}$$

となっている．このことを確かめるために，(5.27) 式のように 2 次元ベクトル $\boldsymbol{\xi} \equiv D_{\rm OL} \boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ を定義して，薄いレンズ近似のもとで (5.33) 式を微分すれば

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}} \Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) &= 2 \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OL} D_{\rm OS}} D_{\rm OL} \int \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \phi \, d\ell \\ &\underbrace{=}_{(5.17)\text{式}} \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}} \boldsymbol{\alpha} \underbrace{=}_{(5.28)\text{式}} \frac{1}{\pi \Sigma_{\rm c}} \int \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}|^2} \, d\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{5.34}$$

および

$$\Delta_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}} \Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = 2 \frac{D_{\rm LS} D_{\rm OL}}{D_{\rm OS}} \int \Delta_{\boldsymbol{\xi}} \phi \, d\ell = 2 \frac{D_{\rm LS} D_{\rm OL}}{D_{\rm OS}} \int \left(\Delta^{(3)}_{\boldsymbol{\xi}} \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \ell^2} \right) d\ell$$

---

[4] 2 次元では

$$\Delta^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}} \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'| = 2\pi \delta^{(2)}_{\rm D} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')$$

が成り立つ．

$$= 2\frac{D_{\mathrm{LS}}D_{\mathrm{OL}}}{D_{\mathrm{OS}}}\Bigg(\underbrace{\int 4\pi G\rho\, d\ell}_{=4\pi G\,\Sigma(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}})} - \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial\ell}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{薄いレンズ近似では }0}\Bigg) = 2\frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}})}{\Sigma_{\mathrm{c}}} \tag{5.35}$$

が証明できる．これらはそれぞれ (5.29) 式と (5.32) 式に一致している．

特に円対称レンズ，すなわち $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma(|\boldsymbol{\theta}|)$ の場合には $\theta_{\mathrm{I}} = |\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}|$ 内にあるレンズ天体の全射影質量：

$$\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}}) = \int_0^{\theta_{\mathrm{I}}} 2\pi\theta\,\Sigma(\theta)\,d\theta \tag{5.36}$$

を定義すれば，(5.32) 式は

$$\Delta_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = 2\frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}})}{\Sigma_{\mathrm{c}}} = \frac{1}{\pi\Sigma_{\mathrm{c}}\theta_{\mathrm{I}}}\frac{d\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}})}{d\theta_{\mathrm{I}}} \tag{5.37}$$

と書き換えられる．ここで

$$\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}\left(\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}})\right) &= \frac{2}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}}) - 2\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^4}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}}) + \frac{1}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}}) \\
&= \frac{1}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}})\frac{1}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\left(\frac{2\theta_{\mathrm{I1}}^2}{2\theta_{\mathrm{I}}} + \frac{2\theta_{\mathrm{I2}}^2}{2\theta_{\mathrm{I}}}\right)\frac{d}{d\theta_{\mathrm{I}}}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}}) \\
&= \frac{1}{\theta_{\mathrm{I}}}\frac{d\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}})}{d\theta_{\mathrm{I}}}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

であるから，(5.37) 式を積分した結果は

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = \frac{1}{\pi\Sigma_{\mathrm{c}}}\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}}) \tag{5.39}$$

となる．もちろん

$$\int \Sigma(\theta)\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\theta}|^2}d\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2}\int_0^{\theta_{\mathrm{I}}} 2\pi\theta\,\Sigma(\theta)\,d\theta \tag{5.40}$$

という関係式を証明すれば，(5.39) 式は (5.34) 式より直接示すこともできる (例題 K).

5.5 円対称重力レンズの定性的振舞い

5.5.1 円対称レンズに対する曲がり角

円対称レンズの場合，(5.28) 式が

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = \frac{4GD_{\mathrm{OL}}}{c^2}\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}})\frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2} \tag{5.41}$$

となることを導いた．具体的に 3 つの代表的な結果をまとめておこう (例題 K 参照).

(i) 点レンズ： 質量 M の質点がレンズ天体である場合には $\widetilde{M} = M/D_{\mathrm{OL}}^2$ で

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = \frac{4GM}{c^2 D_{\mathrm{OL}}} \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2}. \tag{5.42}$$

(ii) 特異等温球レンズ：

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2} \tag{5.43}$$

という球対称密度分布を特異等温球 (singular isothermal sphere) と呼ぶ．定数 σ_v はその中にある粒子の速度分散である．この分布の場合

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}}. \tag{5.44}$$

(iii) 有限な中心コアをもつ等温球レンズ： (5.43) 式は $r = 0$ で発散するため中心部では必ずしも現実的ではない．そこで，有限のコアを与えた

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G} \frac{1}{r^2 + r_c^2} \tag{5.45}$$

を用いることがある．この場合，

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \left(\sqrt{\theta_{\mathrm{I}}^2 + \theta_c^2} - \theta_c\right) \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2} \quad (\theta_c \equiv r_c/D_{\mathrm{OL}}). \tag{5.46}$$

5.5.2　点レンズ解

まずレンズ天体の大きさが無視できる場合を詳しく見てみよう．(5.42) 式をレンズ方程式に代入して

$$\theta_{\mathrm{I}} - \theta_{\mathrm{S}} = \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{OS}}}\alpha = \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{OS}}} \frac{4GM}{c^2 D_{\mathrm{OL}} \theta_{\mathrm{I}}} \equiv \frac{\theta_{\mathrm{E}}^2}{\theta_{\mathrm{I}}} \tag{5.47}$$

と変形する．ここで，θ_{E} は質量 M のレンズ天体に対するアインシュタイン半径：

$$\begin{aligned} \theta_{\mathrm{E}} &\equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{\mathrm{LS}}}{D_{\mathrm{OL}} D_{\mathrm{OS}}}} \\ &\approx \left(\frac{M}{10^{11} M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{D_{\mathrm{OL}} D_{\mathrm{OS}}/D_{\mathrm{LS}}}{1\mathrm{Gpc}}\right)^{-1/2} \text{秒角} \end{aligned} \tag{5.48}$$

と呼ばれ，後述のように重力レンズの典型的な曲がり角度を与える．(5.47) 式の解は

$$\theta_{\mathrm{I}}^2 - \theta_{\mathrm{S}}\theta_{\mathrm{I}} - \theta_{\mathrm{E}}^2 = 0 \Longrightarrow \theta_\pm = \frac{1}{2}\left(\theta_{\mathrm{S}} \pm \sqrt{\theta_{\mathrm{S}}^2 + 4\theta_{\mathrm{E}}^2}\right) \tag{5.49}$$

となる．これは図 5.4 に示したように，点レンズに対するレンズ方程式の解は $D_{\mathrm{LS}}\alpha/D_{\mathrm{OS}}$ と $\theta_{\mathrm{I}} - \theta_{\mathrm{S}}$ の交点を考えれば直感的にも理解できる．

図 5.5 にあるように，レンズ天体を中心として必ず反対側に 2 つの像ができ，

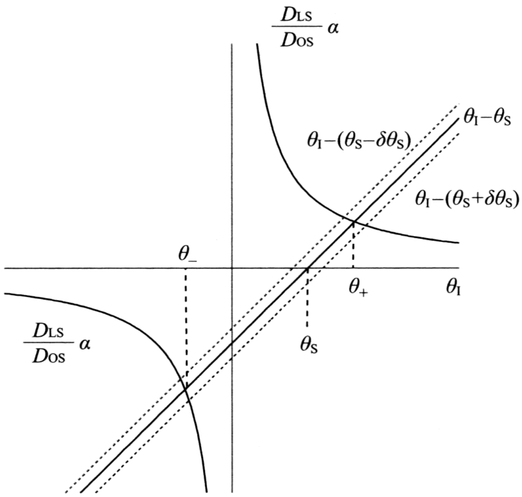


図 5.4 点レンズに対するレンズ方程式の解.

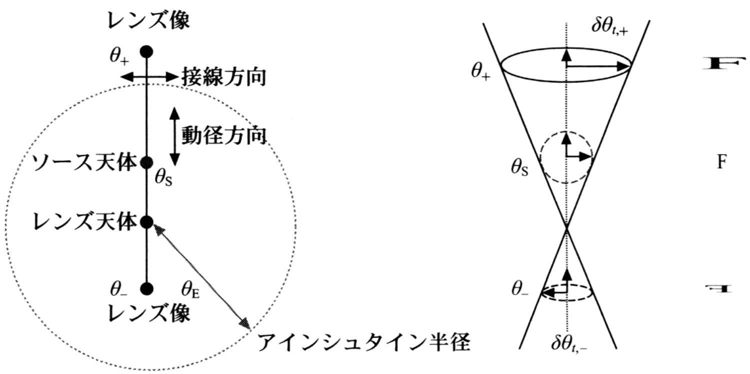


図 5.5 点レンズに対するレンズ像とパリティ．左は天球面上でレンズ天体から角度 θ_S だけ離れた位置にあるソース天体に対する 2 つのレンズ像の位置を示す．ソース天体が点源ではなく，有限のサイズを持っている場合には，右のように像の形状が歪む.

$$\theta_+ + \theta_- = \theta_S, \quad \theta_+\theta_- = -\theta_E^2, \quad -\theta_- < \theta_E < \theta_+ \tag{5.50}$$

という関係がある．ソース天体がレンズ天体から大きく離れている場合 $(\theta_S \gg \theta_E)$ には，$\theta_+ = \theta_S + \theta_E^2/\theta_S$ と $\theta_- = -\theta_E^2/\theta_S$ に 2 つの像ができる．これらは基本的にはそ

れぞれソース天体とレンズ天体の位置である．ソース天体がレンズ天体に近づくにつれ，これらの像はいずれもソース天体とレンズ天体から離れていき，ソース天体がレンズ天体と同じ位置になると ($\theta_{\rm S}=0$)，レンズ像はその視線方向を軸とした角半径 $\theta_{\rm E}$ のリングをつくる．これをアインシュタインリングと呼ぶ．宇宙論的な距離 (例題 G 参照) にある銀河をレンズ天体とした場合のアインシュタイン半径は，約 1 秒角程度ということになる．地上の望遠鏡の角度分解能は大気揺らぎによって決まっており，ハワイ島マウナケア山頂のすばる望遠鏡では，条件のよいときで 0.6 秒角，典型的には約 1 秒角程度である．したがって，2 つの重力レンズ像は地上からでも何とか分解できる．

ソース天体が点光源 (たとえば星やクエーサー) ではなく，銀河のように有限なサイズでひろがっている場合には，レンズ像は変形する．たとえばソース天体が $\theta_{\rm S}$ を中心とする半径 $\delta\theta_{\rm S}$ の円盤であるとする．このとき，レンズ像の動径方向 (radial) の広がりは

$$\begin{aligned}\delta\theta_{\rm r,\pm} &\equiv \frac{\theta_\pm(\theta_{\rm S}+\delta\theta_{\rm S})-\theta_\pm(\theta_{\rm S}-\delta\theta_{\rm S})}{2}\\ &\approx \frac{d\theta_\pm(\theta_{\rm S})}{d\theta_{\rm S}}\delta\theta_{\rm S}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\theta_{\rm S}}{\sqrt{\theta_{\rm S}^2+4\theta_{\rm E}^2}}\right)\delta\theta_{\rm S}. \end{aligned}\tag{5.51}$$

一方，図 5.5 からわかるように方位角方向 (tangential) の広がりは，

$$\delta\theta_{\rm t,\pm}\approx\frac{\theta_\pm(\theta_{\rm S})}{\theta_{\rm S}}\delta\theta_{\rm S}=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{\sqrt{\theta_{\rm S}^2+4\theta_{\rm E}^2}}{\theta_{\rm S}}\right)\delta\theta_{\rm S}.\tag{5.52}$$

つまり，

$$\delta\theta_{\rm S}>\delta\theta_{\rm r,+}>\frac{1}{2}\delta\theta_{\rm S}>\delta\theta_{\rm r,-}>0,\quad \delta\theta_{\rm t,+}>\delta\theta_{\rm S},\quad \delta\theta_{\rm t,-}<0\tag{5.53}$$

であるが，それらの比は

$$\frac{\delta\theta_{\rm r,\pm}}{\delta\theta_{\rm t,\pm}}=\frac{1\pm\theta_{\rm S}/\sqrt{\theta_{\rm S}^2+4\theta_{\rm E}^2}}{1\pm\sqrt{\theta_{\rm S}^2+4\theta_{\rm E}^2}/\theta_{\rm S}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+4\theta_{\rm E}^2/\theta_{\rm S}^2}}\tag{5.54}$$

なので，2 つのレンズ像は相似である．$\delta\theta_{\rm t,-}<0$ であることは，像のパリティが負であること，すなわち θ_- 側のレンズ像は tangential 方向に反転していることを示す．また常に $|\delta\theta_{\rm r,\pm}/\delta\theta_{\rm t,\pm}|<1$ であるから，レンズ像はソース天体の真の形を相対的に動径方向につぶすような変形を受ける．これらは図 5.5 に示されている．

5.5.3　有限サイズ天体に対する円対称レンズ解

次に，レンズ天体が有限のサイズを持つ場合を考えてみる．まず，特異等温球 (SIS) の場合のレンズ方程式は 5.5.1 節より

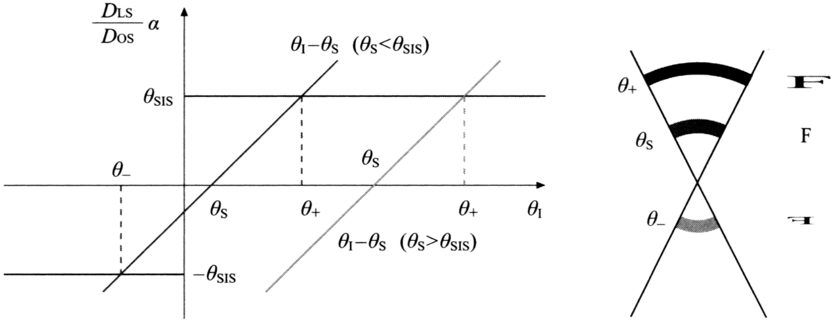


図 5.6 特異等温球レンズに対するレンズ方程式の解.

$$\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}_{\rm S} = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2}\frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}}\frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}{\theta_{\rm I}} \tag{5.55}$$

となる．点レンズの場合のアインシュタイン半径に対応して

$$\theta_{\rm SIS} \equiv \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2}\frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}} \approx \left(\frac{\sigma_v}{186{\rm km/s}}\right)^2 \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}}\ \text{秒角} \tag{5.56}$$

を定義すると，図 5.6 からわかるようにレンズ方程式の解は

$$\begin{cases} \theta_+ = \theta_{\rm S} + \theta_{\rm SIS} & (\theta_{\rm S} > \theta_{\rm SIS}), \\ \theta_\pm = \theta_{\rm S} \pm \theta_{\rm SIS} & (\theta_{\rm S} < \theta_{\rm SIS}) \end{cases} \tag{5.57}$$

となる．ソース天体が遠方からレンズ天体に近づくと，最初は 1 つであったレンズ像が $\theta_{\rm S} < \theta_{\rm SIS}$ 以後 2 つに分離する．$d\theta_\pm/d\theta_{\rm S} = 1$ なので，この 2 つの像の動径方向のサイズはいずれもソース天体の真のサイズと同じである．したがって，これらの 2 つの像は相似ではない．

レンズ天体が有限な中心コアをもつ場合には，図 5.7 からわかるようにレンズ方程式の解は 1 個あるいは 3 個となる．この例のように，レンズ天体の中心部で α が不連続とならない場合には，レンズ方程式はかならず奇数個の解を持つ (odd number theorem)．点レンズと特異等温球は中心に特異点があるために α が不連続となるため，偶数個のレンズ像を持ち得るのである．

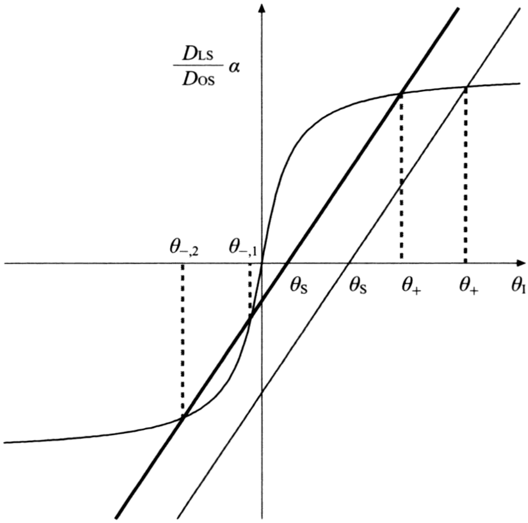


図 5.7　有限な中心コアをもつ等温球レンズに対するレンズ方程式の解.

5.6　レンズ変換行列：コンバージェンスとシア

ソース天体上の微小領域がレンズ面上でどのように変形されるかを考えてみる．ソース面上の任意の点 $\boldsymbol{\theta}_{\rm S,0}$ を原点とする無限小ベクトル $\delta\boldsymbol{\theta}_{\rm S}$ が，レンズ面[5)]上でそれぞれ $\boldsymbol{\theta}_{\rm I,0}$, $\delta\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ に変換されたとする：

$$\boldsymbol{\theta}_{\rm I} = \boldsymbol{\theta}_{\rm I,0} + \delta\boldsymbol{\theta}_{\rm I} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta}_{\rm S} = \boldsymbol{\theta}_{\rm S,0} + \delta\boldsymbol{\theta}_{\rm S}. \tag{5.58}$$

この場合近似的に,

$$\theta^i_{\rm S}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) \approx \theta^i_{\rm S}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I,0}) + \left.\frac{\partial\theta^i_{\rm S}}{\partial\theta^j_{\rm I}}\right|_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I,0}} (\theta^j_{\rm I} - \theta^j_{\rm I,0})$$

$$\Longrightarrow \delta\theta^i_{\rm S} = \left.\frac{\partial\theta^i_{\rm S}}{\partial\theta^j_{\rm I}}\right|_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I,0}} \delta\theta^j_{\rm I} \equiv A_{\rm IS}{}^i{}_j\delta\theta^j_{\rm I} \tag{5.59}$$

が得られる．ここで $A_{\rm IS}$ はレンズからソースへの変換行列であり，レンズ方程式 (5.29)：

$$\theta^i_{\rm I} - \theta^i_{\rm S} = \frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{{\rm I}i}} \equiv \Psi_{,i} \quad (i = 1, 2) \tag{5.60}$$

---

5) イメージ面と呼ばれることもある．このため下添字の I はソース天体のイメージに対応する物理量であることを示す.

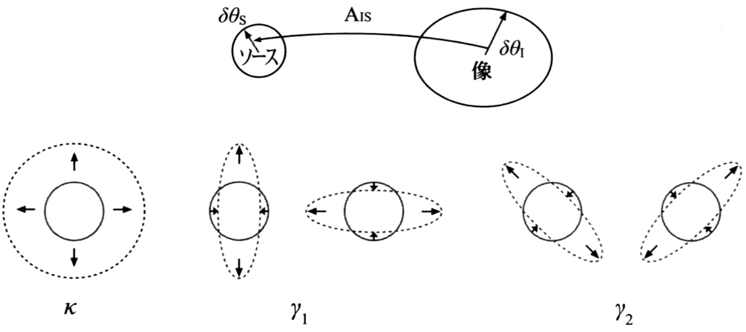


図 5.8 レンズの変換行列と，コンバージェンスおよびシアの物理的意味.

を思い出すと，レンズポテンシャルを用いて

$$A_{\rm IS}{}^i{}_j = \delta^i{}_j - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial\theta_{{\rm I}i}\partial\theta_{\rm I}^j} = \begin{pmatrix} 1-\Psi_{,xx} & -\Psi_{,xy} \\ -\Psi_{,xy} & 1-\Psi_{,yy} \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

と書き表すことができる.

通常は

$$\kappa \equiv \frac{\Psi_{,xx}+\Psi_{,yy}}{2} = \frac{\Delta\Psi}{2} = \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}_{\rm I})}{\Sigma_{\rm c}} \quad (\text{コンバージェンス}) \tag{5.62}$$

$$\gamma_1 \equiv \frac{\Psi_{,xx}-\Psi_{,yy}}{2}, \quad \gamma_2 \equiv \Psi_{,xy} \quad (\text{シア}) \tag{5.63}$$

を定義して変換行列 $A_{\rm IS}$ を

$$A_{\rm IS} = \begin{pmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.64}$$

のように分解する．右辺の 3 つの行列はそれぞれ，レンズ像の相似拡大[6)]，+ モードの変形，× モードの変形に対応する (図 5.8).

具体的に円対称レンズの場合のコンバージェンスとシアを計算してみよう．まずコンバージェンスについては，定義にしたがって (5.39) 式の発散をとってもよいが，そのかわりにすでに導いてある (5.37) 式を用いると直ちに

$$\kappa = \frac{\Psi_{,xx}+\Psi_{,yy}}{2} = \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta}_{\rm I})}{\Sigma_{\rm c}} = \frac{1}{2\pi\Sigma_{\rm c}\theta_{\rm I}}\frac{d\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})}{d\theta_{\rm I}} \tag{5.65}$$

---

6) 常に $\kappa > 0$ なので，このモードだけを考えれば $\kappa < 1$ の場合ソース天体を $(1-\kappa)^{-1}$ 倍に拡大したものがレンズ像となる.

を得る．シアについては (5.39) 式から具体的に計算すれば

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\Psi_{,xx} - \Psi_{,yy}}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi\Sigma_{\rm c}}\left[\frac{\partial}{\partial\theta_{{\rm I}x}}\left(\frac{\theta_{{\rm I}x}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})}{\theta_{\rm I}^2}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_{{\rm I}y}}\left(\frac{\theta_{{\rm I}y}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})}{\theta_{\rm I}^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\Sigma_{\rm c}}\left[\frac{-2\theta_{{\rm I}x}^2 + 2\theta_{{\rm I}y}^2}{\theta_{\rm I}^4}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I}) + \frac{1}{\theta_{\rm I}^2}\underbrace{\left(\theta_{{\rm I}x}\frac{\partial}{\partial\theta_{{\rm I}x}} - \theta_{{\rm I}y}\frac{\partial}{\partial\theta_{{\rm I}y}}\right)}_{=\frac{\theta_{{\rm I}x}^2 - \theta_{{\rm I}y}^2}{\theta_{\rm I}}\frac{d}{d\theta_{\rm I}}}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})\right],
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 = \Psi_{,xy} &= \frac{1}{\pi\Sigma_{\rm c}}\frac{\partial}{\partial\theta_{{\rm I}y}}\left(\frac{\theta_{{\rm I}x}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})}{\theta_{\rm I}^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi\Sigma_{\rm c}}\left(\frac{-2\theta_{{\rm I}x}\theta_{{\rm I}y}}{\theta_{\rm I}^4}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I}) + \frac{\theta_{{\rm I}x}}{\theta_{\rm I}^2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta_{{\rm I}y}}}_{=\frac{\theta_{{\rm I}y}}{\theta_{\rm I}}\frac{d}{d\theta_{\rm I}}}\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})\right).
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

ここで，$\boldsymbol{\theta}_{\rm I} = (\theta_{\rm I}\cos\varphi, \theta_{\rm I}\sin\varphi)$ とおき，

$$
\gamma \equiv \frac{1}{\pi\Sigma_{\rm c}}\left(\frac{1}{2\theta_{\rm I}}\frac{d\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})}{d\theta_{\rm I}} - \frac{\widetilde{M}(<\theta_{\rm I})}{\theta_{\rm I}^2}\right) \tag{5.68}
$$

と定義すれば，(5.66) 式と (5.67) 式が

$$
\gamma_1 = \gamma\frac{\theta_{{\rm I}x}^2 - \theta_{{\rm I}y}^2}{\theta_{\rm I}^2} = \gamma\cos 2\varphi, \tag{5.69}
$$

$$
\gamma_2 = \gamma\frac{2\theta_{{\rm I}x}\theta_{{\rm I}y}}{\theta_{\rm I}^2} = \gamma\sin 2\varphi \tag{5.70}
$$

にまとめられる．このようにシアは，空間を角度 φ だけ回転させると，角度 2φ だけ回転する．じつはこれは重力場がスピン 2 に対応していることに関係している．

5.7 円対称レンズの critical curve と像の変形

(5.69) 式と (5.70) 式より，円対称レンズに対する変換行列 $A_{\rm IS}$ は

$$
A_{\rm IS} = \begin{pmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{pmatrix} - \gamma\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \tag{5.71}
$$

と書ける．この変換行列の固有値と固有ベクトルは

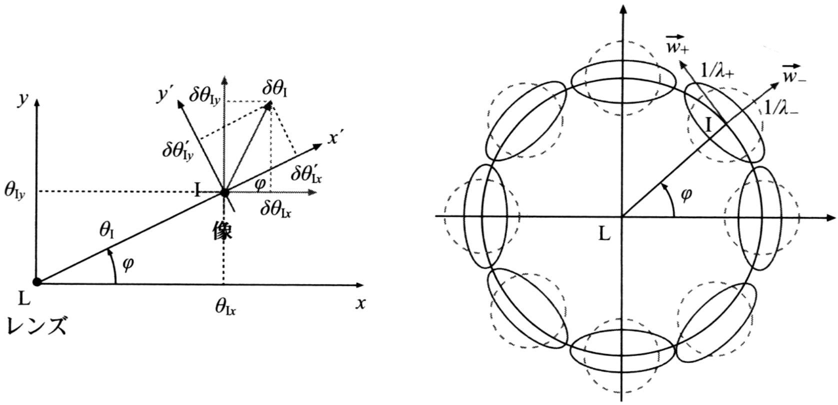


図 5.9 レンズ面の回転とレンズ像の変形.

$$\lambda_- = 1 - \kappa - \gamma = 1 + \frac{1}{\pi \Sigma_c}\left(\frac{\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2} - \frac{1}{\theta_I}\frac{d\widetilde{M}(<\theta_I)}{d\theta_I}\right), \tag{5.72}$$

$$\boldsymbol{w}_- = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \tag{5.73}$$

$$\lambda_+ = 1 - \kappa + \gamma = 1 - \frac{1}{\pi \Sigma_c}\frac{\widetilde{M}(<\theta_I)}{\theta_I^2}, \tag{5.74}$$

$$\boldsymbol{w}_+ = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5.75}$$

であるから

$$U \equiv (\boldsymbol{w}_-, \boldsymbol{w}_+) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5.76}$$

を用いると A_{IS} は対角化されて

$$A'_{IS} = U^{-1} A_{IS} U = \begin{pmatrix} 1-\kappa & 0 \\ 0 & 1-\kappa \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \tag{5.77}$$

となる.

U は座標系を角度 φ だけ回転させる行列であるから，図 5.9 の左のようにその座標系に移ると

$$\delta\boldsymbol{\theta}'_I = U^{-1}\delta\boldsymbol{\theta}_I, \quad \delta\boldsymbol{\theta}'_S = U^{-1}\delta\boldsymbol{\theta}_S, \tag{5.78}$$

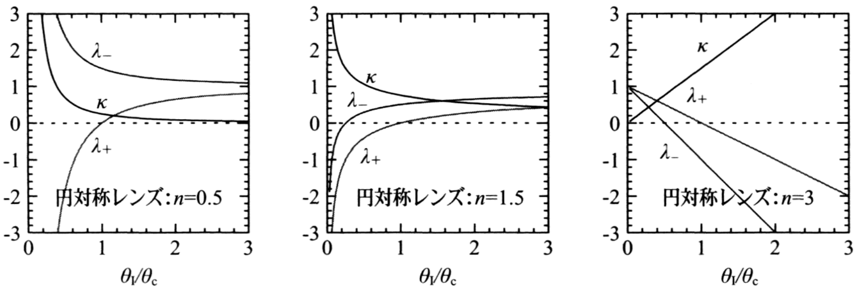


図 5.10 円対称レンズに対するコンバージェンスと $\lambda_\pm$ の振舞い.

$$\delta \boldsymbol{\theta}'_{\rm S} = A'_{\rm IS}\delta\boldsymbol{\theta}'_{\rm I} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}'_{\rm I}, \tag{5.79}$$

$$\delta \boldsymbol{\theta}'_{\rm I} = A'^{-1}_{\rm IS}\delta\boldsymbol{\theta}'_{\rm S} \equiv A'_{\rm SI}\delta\boldsymbol{\theta}'_{\rm S} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_- & 0 \\ 0 & 1/\lambda_+ \end{pmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}'_{\rm S}. \tag{5.80}$$

つまり，ソース天体が単位円だとすれば，レンズ像は，レンズ天体の方向に $1/|\lambda_+|$，それと直交する方向に $1/|\lambda_-|$ の楕円となる (図 5.9 の右参照)．λ_- と λ_+ の符号は像のパリティーを示し，負符号ならばその方向に関しては逆像となる．$\lambda_\pm = 0$ となる位置ではレンズ像は発散してしまう．そのような曲線 (円対称レンズの場合には円となる) を，レンズ面上では critical curve，ソース面上では caustics と呼ぶ．さらに $\widetilde{M}(<\theta_{\rm I}) = \Sigma_0\theta_{\rm I}^n$ $(n > 0)$ の場合を考えれば

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\Sigma_0}{\pi\Sigma_{\rm c}}\frac{n}{2}\theta_{\rm I}^{n-2}, \\ \lambda_- &= 1 + \frac{\Sigma_0}{\pi\Sigma_{\rm c}}\theta_{\rm I}^{n-2}(1-n), \\ \lambda_+ &= 1 - \frac{\Sigma_0}{\pi\Sigma_{\rm c}}\theta_{\rm I}^{n-2} \end{aligned} \tag{5.81}$$

となる．$\theta_{\rm c} \equiv (\Sigma_0/\pi\Sigma_{\rm c})^{1/(2-n)}$ と定義した場合の κ と $\lambda_\pm$ の $\theta_{\rm I}$ 依存性を図 5.10 に示しておく．図 5.11 はソース天体が円の場合のレンズ像の変形の例である． 動径方向に伸びた変形像をラディアルアーク (radial arc)，それと直交方向に伸びた変形像をタンジェンシャルアーク (tangential arc) と呼ぶ.

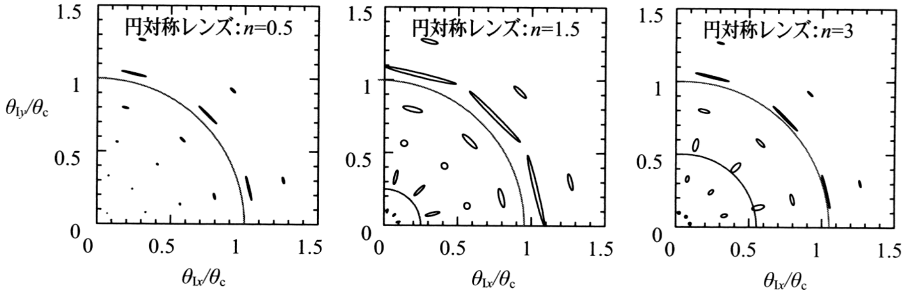


図 **5.11**　円対称レンズによるソース天体 (半径 0.007 の円) の変形.

5.8　面輝度定理

重力レンズは光線の経路を変化させるだけでなく，天体のみかけの光度をも変える．しかしながら，その天体の面輝度 (surface brightness) と呼ばれる量は常に一定に保たれている．これを面輝度定理と呼ぶ．それを証明するために今までと同様，図 5.12 のようにソース天体を出た光が直接届く場合 (S $\longrightarrow$ S′ $\longrightarrow$ O) と，重力レンズ効果をうける場合 (S $\longrightarrow$ I $\longrightarrow$ O) の面輝度を計算してみる．

まずソース天体が単位時間あたり放出するエネルギーを $\mathscr{L}$ とする．天文学ではこれを絶対光度 (absolute luminosity)，あるいは単に光度 (luminosity) と呼ぶ．次元は，[erg/s] である[7]．

次に，ソース天体から測った 2 次元角度ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ と $\boldsymbol{\chi}$ を以下によって定義する．

$$\overrightarrow{\mathrm{LI}} \equiv D_{\mathrm{LS}}\boldsymbol{\chi}, \quad \overrightarrow{\mathrm{LS}'} \equiv D_{\mathrm{LS}}\boldsymbol{\gamma}. \tag{5.82}$$

これらは，観測者がみこむ角 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}$ と $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}$ を用いてそれぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{LI}} = D_{\mathrm{OL}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{LS}'} = D_{\mathrm{OL}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}} \tag{5.83}$$

とも書けるので

---

[7] 周波数 ν から $\nu + d\nu$ の範囲の光が単位時間あたり放出するエネルギーを $\mathscr{L}_\nu\, d\nu$ と定義することもある．この場合 $\mathscr{L}_\nu$ の次元は [erg/s/Hz] となる．$\mathscr{L}$ は $\mathscr{L}_\nu$ を全周波数で積分したものであり，その意味で bolometric luminosity と呼ばれることもある．実際の観測では $\mathscr{L}_\nu$ をある有限の周波数範囲で積分したものを考えるのが普通であり，それを対応する周波数帯の光度 (band luminosity) と呼んで区別することもある．たとえば，γ 線光度，X 線光度，赤外線光度，可視光度，電波光度などであるが，天文学ではこれらを明示せずあいまいなまま議論することも多いので注意が必要である．本節の議論は $\mathscr{L}$ を $\mathscr{L}_\nu$ に置き換えてもそのまま成立する．

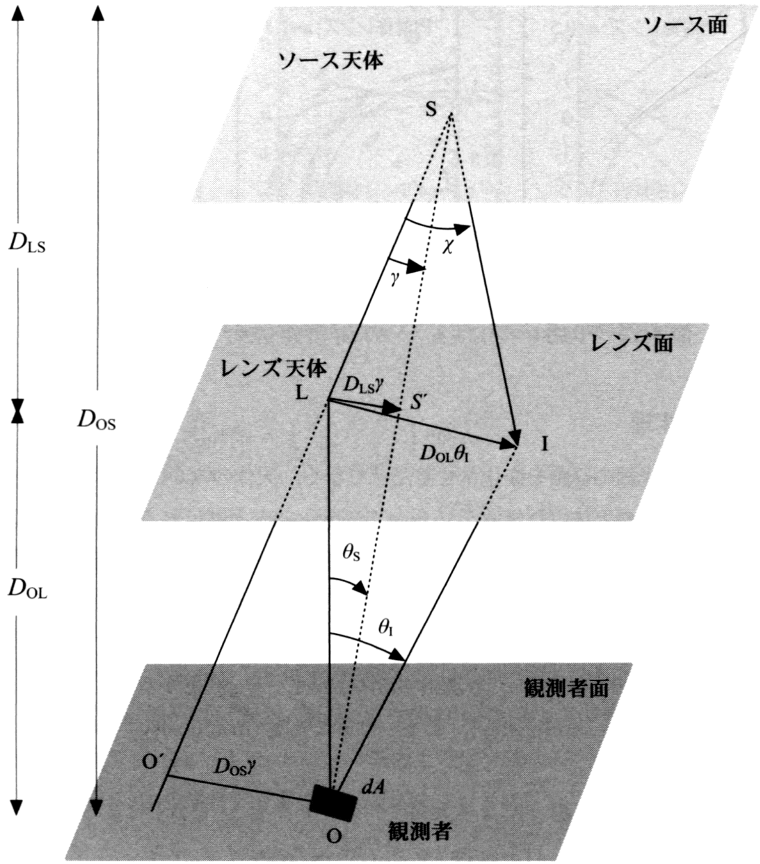


図 **5.12** 重力レンズにおけるみかけの光度と面輝度定理.

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{D_{\rm OL}}{D_{\rm LS}}\boldsymbol{\theta}_{\rm I}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{D_{\rm OL}}{D_{\rm LS}}\boldsymbol{\theta}_{\rm S} \tag{5.84}$$

という関係が得られる.

このとき, S と L を観測者面上に延長した点を O′ とすれば, 観測者の位置 O での微小面積要素を

$$d\mathscr{A} = D_{\rm OS}^2\, d\gamma_x d\gamma_y \underbrace{=}_{(5.84)\text{ 式}} \left(\frac{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}{D_{\rm LS}}\right)^2 d\theta_{{\rm S},x} d\theta_{{\rm S},y} \tag{5.85}$$

と書くことができる.

ソース天体が全立体角に等方的に輻射を放出しているならば，ソース天体が単位立体角あたりに放出する光度 [erg/s/sr] は $\mathscr{L}/4\pi$ となる．ソース天体に対して図 5.12 の I 方向の立体角要素 $d\chi_x d\chi_y$ に放出された輻射を観測者の面積要素 $d\mathscr{A}$ で割れば，重力レンズを受けたソース天体の観測者の位置におけるエネルギー流束 (単位面積あたりの光度)[8] $F_{\rm SIO}$ が

$$F_{\rm SIO} = \frac{\mathscr{L}}{4\pi} \times d\chi_x d\chi_y \times \left(\frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}\right)^2 \frac{1}{d\theta_{{\rm S},x} d\theta_{{\rm S},y}}$$

$$\underbrace{=}_{(5.84)\,式} \frac{\mathscr{L}}{4\pi D_{\rm OS}^2} \frac{d\theta_{{\rm I},x} d\theta_{{\rm I},y}}{d\theta_{{\rm S},x} d\theta_{{\rm S},y}} \tag{5.86}$$

と計算できる．ここで，

$$F_{\rm SS'O} \equiv \frac{\mathscr{L}}{4\pi D_{\rm OS}^2} \tag{5.87}$$

は，ソース天体が重力レンズを受けることなく直進した場合の観測者の位置におけるエネルギー流束である．(5.86) 式は，重力レンズを受けた像 I′ のエネルギー流束 $F_{\rm SIO}$ が受けない場合に比べて

$$\frac{F_{\rm SIO}}{F_{\rm SS'O}} = \frac{d\theta_{{\rm I},x} d\theta_{{\rm I},y}}{d\theta_{{\rm S},x}\, d\theta_{{\rm S},y}} = \frac{\theta_{\rm I} d\theta_{\rm I}}{\theta_{\rm S}\, d\theta_{\rm S}} \tag{5.88}$$

倍だけ変化することを示している (2 つめの等号は 2 次元角度ベクトルを 2 次元の極座標で書き直したものである)．この比は $\boldsymbol{\theta}_{\rm S}$ から $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ への変換のヤコビアンに等しい．

(5.88) 式の $d\theta_{{\rm S},x} d\theta_{{\rm S},y}$ と $d\theta_{{\rm I},x} d\theta_{{\rm I},y}$ は，それぞれ観測者がソース天体とそのレンズ像の同じ領域を見込む立体角である．したがって，天体からの輻射を観測者の単位面積およびそれを見こむ単位立体角あたりの値にしたものを表面輝度 $\mathscr{S}$ と定義すれば[9]

$$\mathscr{S}_{\rm SIO} \equiv \frac{F_{\rm SIO}}{d\theta_{{\rm I},x} d\theta_{{\rm I},y}} = \frac{F_{\rm SS'O}}{d\theta_{{\rm S},x} d\theta_{{\rm S},y}} \equiv \mathscr{S}_{\rm SS'O} \tag{5.89}$$

が成り立つ．つまり重力レンズ効果の有無には関係なく，天体の表面輝度は一定である．これは光線に沿って光が吸収や散乱を受けない場合に成り立つ一般的な結果で，面輝度定理 (brightness theorem) と呼ばれている．重力レンズは光子の個数やエネルギーを変化させる過程ではないため，この面輝度定理を満たしているのである．したがって，重力レンズによって天体のエネルギー流束 (みかけの光度) が変化するのは，その天体を見込む立体角の大きさの変化に起因している．

---

8) これを，みかけの光度 (apparent luminosity) と呼ぶこともある．名前は紛らわしいがその次元は [erg/s/cm^2] であり，(絶対) 光度と異なっているので気をつけてほしい．

9) 次元は [erg/s/cm^2/sr].

5.9　重力レンズ像の増光率

具体的に円対称レンズに対するレンズ像の増光率を計算してみよう．

(i) 点レンズ： 点レンズの場合には，レンズ方程式の解は (5.49) 式より

$$\theta_\pm = \frac{1}{2}\left(\theta_\mathrm{S} \pm \sqrt{\theta_\mathrm{S}^2 + 4\theta_\mathrm{E}^2}\right) \tag{5.90}$$

なので，2 つの像に対応する増光率はそれぞれ

$$\begin{aligned} A_\pm &\equiv \left|\frac{\theta_\pm d\theta_\pm}{\theta_\mathrm{S} d\theta_\mathrm{S}}\right| = \left|\frac{1}{2\theta_\mathrm{S}}\left(\theta_\mathrm{S} \pm \sqrt{\theta_\mathrm{S}^2 + 4\theta_\mathrm{E}^2}\right) \times \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\theta_\mathrm{S}}{\sqrt{\theta_\mathrm{S}^2 + 4\theta_\mathrm{E}^2}}\right)\right| \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+4/x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+4/x^2}} \pm 2\right) \quad (x \equiv \theta_\mathrm{S}/\theta_\mathrm{E}). \end{aligned} \tag{5.91}$$

最後の式の括弧の中に相加相乗平均の関係を用いると，レンズ天体の中心に対してソース天体と同じ側にあるレンズ像 ($\theta_\mathrm{I} = \theta_+$) は必ずより明るくなる ($A_+ > 1$) ことがわかる (図 5.5 参照).

この 2 つの像がなす角 $\theta_+ - \theta_- = \sqrt{\theta_\mathrm{S}^2 + 4\theta_\mathrm{E}^2}$ が小さい場合には，これらは分離できず 1 つの像として観測されることになる．この場合の全増光率は

$$A_\mathrm{tot} = A_+ + A_- = \frac{1}{2}\frac{2+4/x^2}{\sqrt{1+4/x^2}} = \frac{x^2+2}{x\sqrt{x^2+4}}. \tag{5.92}$$

一方，2 つの増光率の比は

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{2+4/x^2+2\sqrt{1+4/x^2}}{2+4/x^2-2\sqrt{1+4/x^2}} = \left(\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{\sqrt{4+x^2}-x}\right)^2. \tag{5.93}$$

これらの結果を図 5.13 にまとめておく．$\theta_\mathrm{S} = \theta_\mathrm{E}$ が 1 つの目安となる値を与え，

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx 1.17, \quad A_- = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \approx 0.17, \\ A_\mathrm{tot} &= \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34, \quad \frac{A_+}{A_-} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \approx 6.85 \end{aligned} \tag{5.94}$$

となる.

(ii) 特異等温球： この場合，レンズ方程式の解は (5.57) 式で与えられる．$\theta_\mathrm{S} > \theta_\mathrm{SIS}$ ならば像は 1 つで

$$\theta_+ = \theta_\mathrm{S} + \theta_\mathrm{SIS} \Longrightarrow A_+ \equiv \left|\frac{\theta_+ d\theta_+}{\theta_\mathrm{S} d\theta_\mathrm{S}}\right| = \frac{\theta_\mathrm{SIS}}{\theta_\mathrm{S}} + 1 \quad (\theta_\mathrm{S} > \theta_\mathrm{SIS}). \tag{5.95}$$

一方，$\theta_\mathrm{S} < \theta_\mathrm{SIS}$ なら像は 2 つとなり

$$\theta_\pm = \theta_\mathrm{S} \pm \theta_\mathrm{SIS} \Longrightarrow A_\pm \equiv \left|\frac{\theta_\pm d\theta_\pm}{\theta_\mathrm{S} d\theta_\mathrm{S}}\right| = \frac{\theta_\mathrm{SIS}}{\theta_\mathrm{S}} \pm 1 \quad (\theta_\mathrm{S} < \theta_\mathrm{SIS}). \tag{5.96}$$

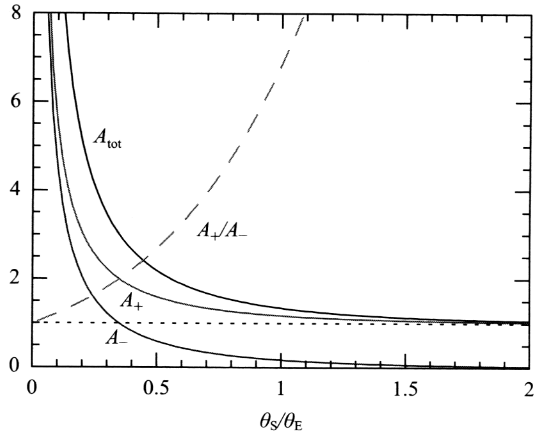


図 5.13 点レンズによる増光率.

後者の場合，全増光率とそれらの比は

$$A_{\mathrm{tot}} = A_+ + A_- = 2\frac{\theta_{\mathrm{SIS}}}{\theta_{\mathrm{S}}}, \quad \frac{A_+}{A_-} = \frac{\theta_{\mathrm{SIS}} + \theta_{\mathrm{S}}}{\theta_{\mathrm{SIS}} - \theta_{\mathrm{S}}} \tag{5.97}$$

となる.

5.10 重力マイクロレンズと MACHO

今まではソース天体，レンズ天体，および観測者の運動を無視した静的状況を考えてきた．その場合，もちろん重力レンズ像は変化しない．しかし，実際にはこれらの運動，さらにはソース天体の光度が時間変動することを考えると，重力レンズ像は時間変化するはずだ．しかし遠方天体に対してはこの運動の効果はほとんど無視できる．たとえば，我々から 100Mpc 離れた天体が速度 300 km/s で運動しているとすると[10)]，一年間に動く角度は

$$\Delta\theta \approx \frac{300\mathrm{km\,s^{-1}} \times 3 \times 10^7\mathrm{s}}{100\mathrm{Mpc}} \approx 1 \text{ マイクロ秒角} \tag{5.98}$$

10) 地球は太陽の周りを 30 km/s で公転している．太陽系は銀河系中心に対して 220km/s で，宇宙マイクロ波背景輻射の静止系に対して 370km/s で，それぞれ運動している．銀河系とアンドロメダ銀河を含む局所銀河群は，宇宙マイクロ波背景輻射の静止系に対して 630km/s で運動している．したがって，仮に遠方天体が宇宙マイクロ波背景輻射に対して静止しているとしても，太陽系にいる観測者に対しては 370km/s の相対速度で運動していることになる.

程度でしかない．

しかしながら，銀河系内にあるかもしれない暗い天体 (MACHO : 5.1 節) が，より遠方の星に対して及ぼす重力レンズ効果による光度の時間変化は観測できるかもしれない．1986 年，プリンストン大学のボーダン・パチンスキーは重力レンズ効果を用いて，我々の銀河系を満たしているかもしれない $(10^{-6} \sim 100)M_{\odot}$ の MACHO を検出する巧妙な方法を提案した．銀河系の伴銀河である大マゼラン星雲を観測すると，ごくまれに 1 つの MACHO 天体が，その星と地球とを結ぶ線上 (のごく近傍) を横切ることがあるはずだ (銀河系内の天体は静止してはおらず，平均的には 200 km/sec 程度の速度でランダムに運動している)．その場合，個々の MACHO は光を集めるレンズとして働き，約 1 カ月の期間その星がより明るく輝いて見えるはずだ．これは重力マイクロレンズ効果と呼ばれ，1 個の星がこの効果を受ける確率はとてつもなく小さいのであるが，大マゼラン星雲にある約 1000 万個の星の光度を定期的にモニターすることで確率の低さを補うことができる．このパチンスキーによる提案を具体的に検討してみよう．

5.10.1　マイクロレンズの光度曲線

実際には，ソース天体，レンズ天体，観測者はいずれも運動しているが，観測者から見たときにレンズ天体が常に原点となるような天球上の 2 次元座標系を選ぶことにする．この場合，静止しているように見えるレンズ天体に対してソース天体が相対速度 $v_{\rm L}$ で運動するとしよう．角度座標ではソース天体が角速度 $u_{\rm L} \equiv v_{\rm L}/D_{\rm OL}$ で相対的に運動しているように観測される．レンズ天体を点レンズで近似する．あるソース天体が時刻 t_0 でレンズ天体にもっとも接近するものとし，そのときの角度を $\theta_{\rm S0}$ とすれば，時刻 t におけるソース天体とレンズ天体のなす角度は

$$\theta_{\rm S}(t) = \sqrt{\theta_{\rm S0}^2 + u_{\rm L}^2 (t - t_0)^2} \tag{5.99}$$

で与えられる (図 5.14)．

(5.92) 式より，これに対応する増光率 $A(t)$ は

$$A(t) = \frac{x^2(t) + 2}{x\sqrt{x^2(t) + 4}},$$

$$x(t) = \frac{\theta_{\rm S}(t)}{\theta_{\rm E}} = \sqrt{\left(\frac{\theta_{\rm S0}}{\theta_{\rm E}}\right)^2 + \frac{\pi \Sigma_{\rm c} v_{\rm L}^2}{M}(t - t_0)^2}. \tag{5.100}$$

銀河系内の MACHO によって大マゼラン星雲 (LMC : Large Magellanic Cloud) 内の星がマイクロレンズを受ける場合，典型的なパラメータを考えてみると，

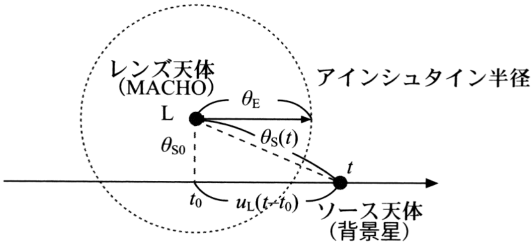


図 5.14　マイクロレンズにおけるレンズ天体とソース天体の相対運動.

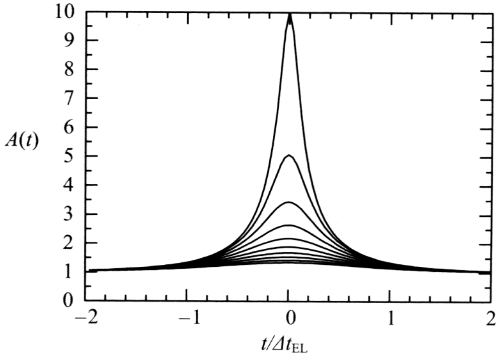


図 5.15　マイクロレンズの増光率. 上から $\theta_{S0}/\theta_E = 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$ の場合. Δt_{EL} はアインシュタイン半径をレンズ天体が横切る時間スケール.

$$\begin{cases} v_L \approx \dfrac{v_{rot}}{\sqrt{2}} \approx 200\mathrm{km\,s^{-1}}, \\ D_{OL} \approx R \approx 10\mathrm{kpc}, \\ \Sigma_c = \dfrac{c^2}{4\pi G}\dfrac{D_{OS}}{D_{OL}(D_{OS}-D_{OL})} \approx \dfrac{c^2}{4\pi G}\dfrac{1}{R} \approx 3\times 10^4 \left(\dfrac{10\mathrm{kpc}}{R}\right)\mathrm{gcm^{-3}}, \\ \theta_E = \dfrac{1}{D_{OL}}\sqrt{\dfrac{M}{\pi\Sigma_c}} \approx \dfrac{1}{R}\sqrt{4GMR} = 0.3\sqrt{\dfrac{M}{0.1M_\odot}}\sqrt{\dfrac{10\mathrm{kpc}}{R}}\,\text{ミリ秒角}, \\ \Delta t_{EL} \equiv \dfrac{\theta_E}{u_L} \approx \dfrac{\sqrt{4GMR}}{v_L} \approx 20\sqrt{\dfrac{M}{0.1M_\odot}}\sqrt{\dfrac{R}{10\mathrm{kpc}}}\left(\dfrac{200\mathrm{km\,s^{-1}}}{v_L}\right)\text{日}. \end{cases} \tag{5.101}$$

図 5.15 に $A(t)$ の典型的な振舞いを示しておく．

5.10.2 円対称重力レンズに対する断面積

ソース天体が A 倍に増光されるときのレンズ天体との離角を $\theta_{\rm S}(A)$ とする．ソース天体がレンズ天体の中心から $\theta < \theta_{\rm S}(A)$ 以内に位置していれば，ソース天体は A 倍以上の増光を受けるので，レンズ面で考えたときの重力レンズの断面積は単純に

$$\sigma(>A) \equiv \pi[D_{\rm OL}\theta_{\rm S}(A)]^2 \tag{5.102}$$

で与えられる．したがって，$\theta_{\rm S}$ の関数として与えられた増光率 $A = A(\theta_{\rm S})$ を逆に解き直して $\theta_{\rm S} = \theta_{\rm S}(A)$ を求めれば断面積が計算できる．

(i) 点レンズ： (5.92) 式を逆に解くと

$$\begin{aligned}
A = \frac{x^2+2}{x\sqrt{x^2+4}} &\Longrightarrow A^2x^2(x^2+4) = x^4+4x^2+4 \\
&\Longrightarrow (A^2-1)x^4+4(A^2-1)x^2-4=0 \\
&\Longrightarrow x^2 = \frac{-2(A^2-1)+\sqrt{4(A^2-1)^2+4(A^2-1)}}{A^2-1} \\
&\qquad = \frac{2}{A^2-1}\left[-(A^2-1)+A\sqrt{A^2-1}\right] \\
&\qquad = \frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1}.
\end{aligned} \tag{5.103}$$

したがって，(5.102) 式は

$$\begin{aligned}
\sigma(>A) &= \pi[D_{\rm OL}\theta_{\rm E}x]^2 \\
&= \pi D_{\rm OL}^2 \times \left(\frac{1}{D_{\rm OL}}\sqrt{\frac{M}{\pi\Sigma_{\rm c}}}\right)^2 \frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1} \\
&= \frac{M}{\Sigma_{\rm c}}\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1} \\
&= \frac{4\pi GM}{c^2}\frac{D_{\rm OL}D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}}\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1}
\end{aligned} \tag{5.104}$$

となる．

(ii) 特異等温球： この場合，密度分布

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2} \tag{5.105}$$

なので，(5.56) 式と同様に

$$\theta_{\rm SIS} = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2}\frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}} \tag{5.106}$$

を定義すれば，(5.95) 式と (5.97) 式より

$$\begin{cases} \theta_{\rm S} > \theta_{\rm SIS},\ A = \dfrac{\theta_{\rm SIS}}{\theta_{\rm S}} + 1 & \Longrightarrow \theta_{\rm S} = \dfrac{\theta_{\rm SIS}}{A-1}, \\ \theta_{\rm S} < \theta_{\rm SIS},\ A = 2\dfrac{\theta_{\rm SIS}}{\theta_{\rm S}} & \Longrightarrow \theta_{\rm S} = \dfrac{2\theta_{\rm SIS}}{A}. \end{cases} \tag{5.107}$$

したがって，

$$\sigma(>A) = \pi\left(\frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2}\frac{D_{\rm OL}D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}}\right)^2 \times \begin{cases} 4/A^2 & (A > 2), \\ 1/(A-1)^2 & (1 < A < 2). \end{cases} \tag{5.108}$$

5.10.3 マイクロレンズの確率

次にある 1 つのソース天体に対して増光率 A 以上の重力レンズが起こる確率 $\tau(>A; D_{\rm OS})$ を計算してみよう．そのソース天体の視線方向に観測者から距離 r の位置に存在するレンズ天体の個数密度を $n(r)$, そのレンズ天体が増光率 A 以上の重力レンズの断面積を $\sigma(>A;r)$ とすれば

$$\tau(>A; D_{\rm OS}) = \int_0^{D_{\rm OS}} n(r)\,\sigma(>A;r)\,dr. \tag{5.109}$$

ここで具体的に，銀河中心にいる観測者が $D_{\rm OS} \approx 50\text{kpc}$ にある大マゼラン星雲中の星を観測する場合を考えてみる．銀河中のダークマターの質量密度分布を

$$\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_v^2}{2\pi G}\dfrac{1}{r^2 + r_{\rm c}^2} & (r < R_{\rm h}), \\ 0 & (r > R_{\rm h}) \end{cases} \tag{5.110}$$

と近似する ($R_{\rm h}$ は銀河をとりまくハローのサイズ)．これらを点粒子の集まりとみなし，r とは無関係に質量 $M \sim M + dM$ の粒子が全体の $f(M)\,dM$ だけの割合を占めるものとする．つまり，質量 M のレンズ天体の個数密度が

$$n(r;M) = \frac{\rho(r;M)}{M} = \frac{f(M)}{M}\rho(r), \qquad \int_0^\infty f(M)\,dM = 1 \tag{5.111}$$

で与えられるものとする．距離 r にある質量 M の質点に対する重力レンズの断面積は，(5.104) 式より

$$\sigma(>A;r,M)=\frac{4\pi GM}{c^2}\frac{r(D_{\rm OS}-r)}{D_{\rm OS}}\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1} \tag{5.112}$$

である．したがって (5.109) 式は

$$\begin{aligned}
\tau(>A;D_{\rm OS}) &= \int_0^{D_{\rm OS}} dr \int_0^\infty n(r;M)\,\sigma(>A;r,M)\,dM \\
&= \int_0^{R_{\rm h}} dr \int_0^\infty dM\, \frac{\sigma_v^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2+r_{\rm c}^2}\frac{f(M)}{M} \\
&\quad \times \frac{4\pi GM}{c^2}\frac{r(D_{\rm OS}-r)}{D_{\rm OS}}\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1} \\
&= 2\frac{\sigma_v^2}{c^2}\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1} \\
&\quad \times \left(\int_0^{R_{\rm h}} \frac{r}{r^2+r_{\rm c}^2}\,dr - \frac{1}{D_{\rm OS}}\int_0^{R_{\rm h}}\frac{r^2}{r^2+r_{\rm c}^2}\,dr\right).
\end{aligned} \tag{5.113}$$

この右辺に登場する積分は

$$\int_0^{R_{\rm h}} \frac{r}{r^2+r_{\rm c}^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_0^{R_{\rm h}^2}\frac{dx}{x+r_{\rm c}^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{R_{\rm h}^2+r_{\rm c}^2}{r_{\rm c}^2} = \ln\sqrt{1+\frac{R_{\rm h}^2}{r_{\rm c}^2}}, \tag{5.114}$$

$$\int_0^{R_{\rm h}} \frac{r^2}{r^2+r_{\rm c}^2}\,dr = \int_0^{R_{\rm h}}\left(1-\frac{r_{\rm c}^2}{r^2+r_{\rm c}^2}\right)dr = R_{\rm h} - r_{\rm c}\tan^{-1}\left(\frac{R_{\rm h}}{r_{\rm c}}\right) \tag{5.115}$$

であるから，(5.113) 式は

$$\begin{aligned}
\tau(>A;D_{\rm OS}) &= 2\frac{\sigma_v^2}{c^2}\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1} \\
&\quad \times \left[\ln\sqrt{1+\frac{R_{\rm h}^2}{r_{\rm c}^2}} + \frac{r_{\rm c}}{D_{\rm OS}}\tan^{-1}\left(\frac{R_{\rm h}}{r_{\rm c}}\right) - \frac{R_{\rm h}}{D_{\rm OS}}\right].
\end{aligned} \tag{5.116}$$

この結果は $f(M)$ には依存しないことに注意してほしい．典型的な例を図 5.16 に示しておく．$A=3/\sqrt{5}\approx 1.34$ を重力レンズの目安とすれば，ソース天体 1 つあたりの確率は 10^{-6} 程度でしかない (図の縦の破線)．逆にいえば，100 万個程度の星を観測すれば平均的には常にその中の 1 個程度が重力レンズを受けていることが期待できる．

5.10.4 マイクロレンズのイベントレート

前節で計算した $\tau(>A)$ は，あるソース天体がある瞬間に重力レンズを起こしている確率である．仮に銀河系内でのレンズ天体の運動が無視できるならば，あるソース天体が重力レンズを起こしていなければそれはいつまで経っても重力レンズを起こすわけ

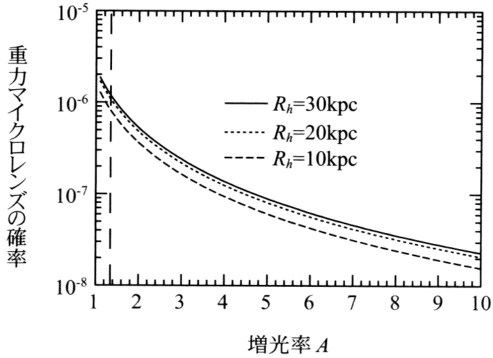


図 5.16 銀河系ハローによる大マゼラン星雲の星に対する増光率 A 以上の重力マイクロレンズの確率．銀河のコア半径を $r_c = 2\text{kpc}$，大マゼラン星雲までの距離を $D_{\rm OS} = 50\text{kpc}$ とした．銀河系ハローの半径 $R_{\rm h}$ として 30kpc，20kpc，10kpc の 3 通りの場合をプロットしてある．縦の破線は増光率が $A = 3/\sqrt{5} \approx 1.34$ となる場合を示す．

がない．しかし実際にはレンズ天体は速度 $v_{\rm L}$ でランダムに運動しているため，ある期間連続的に観測すれば，そのソース天体がやがて重力レンズを起こす可能性がある．ここでは，あるソース天体を連続的にモニター観測した場合に，単位時間あたり増光率 A 以上の重力レンズを起こすイベントレート $\Gamma(>A)$ $[\text{s}^{-1}]$ を計算してみる．

そのためには ΔT の観測期間に，あるレンズ天体と角距離 $\theta_{\rm S}(A)$ 以内に存在するソース天体の個数を数えればよい．レンズ天体の角速度を $u_{\rm L}$ とすれば，ソース天体が重力レンズを起こしうる天球上の領域の面積は $2\theta_{\rm S}(A)u_{\rm L}\Delta T$ となる．ところで，$\tau(>A)$ はソース天体 1 個あたりの重力レンズの確率であるが，これはあるレンズ天体のまわり $\pi\theta_{\rm S}^2(A)$ 内に存在しているソース天体の個数の期待値とも解釈できる．この解釈にしたがえば，A 以上の重力レンズを起こしうるソース天体の単位角面積当たりの個数密度の期待値は $\tau(>A)/(\pi\theta_{\rm S}^2(A))$ であるので，イベントレートとして

$$\Gamma(>A) = \frac{1}{\Delta T} \times 2\theta_{\rm S}(A)u_{\rm L}\Delta T \times \frac{\tau(>A)}{\pi\theta_{\rm S}^2(A)} = \frac{2}{\pi}\frac{\tau(>A)}{\theta_{\rm S}(A)/u_{\rm L}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{A\sqrt{A^2-1}+A^2-1}}\frac{\tau(>A)}{\Delta t_{\rm EL}} \tag{5.117}$$

が得られる．

ここで，典型的な値として $A = 3/\sqrt{5}$ および (5.101) 式を代入すれば，あるソース

天体がマイクロレンズを起こす平均的時間間隔の期待値は

$$\Delta t \equiv \frac{1}{\Gamma(>3/\sqrt{5})}$$

$$\approx 10^5 \left(\frac{10^{-6}}{\tau(>3/\sqrt{5})}\right)\sqrt{\frac{M}{0.1M_\odot}}\sqrt{\frac{R}{10\mathrm{kpc}}}\left(\frac{200\mathrm{km\,s^{-1}}}{v_\mathrm{L}}\right) \text{年} \tag{5.118}$$

となる．つまり，あるソース天体を観測した際マイクロレンズが 2 回起こる可能性はほとんどないことがわかる．また，現実的な観測期間 (約 1 年程度) 内になんらかのマイクロレンズイベントを検出するためにはやはり 10^5 個以上のソース天体を同時にモニターする必要があることもわかる．

5.10.5 マイクロレンズの発見

実際 MACHO の重力レンズ効果によって背景星が増光したと思われる現象が 1993 年に初めて報告された[11] (図 5.17 と 5.18)．この結果は，我々の銀河系を満たしている暗黒物質 (の一部) が天文学的候補よりなっていることを示した画期的なものである．

マイクロレンズを起こしている天体を質点で近似してみよう．観測されている増光率

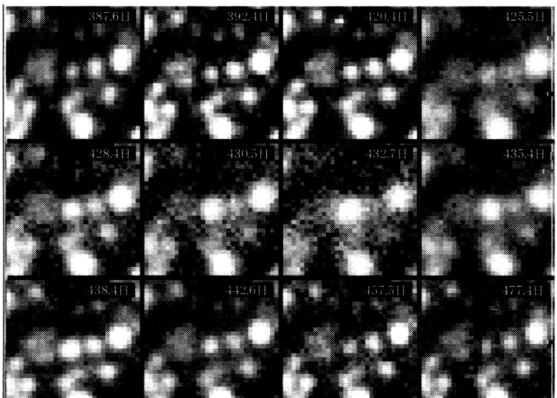


図 5.17 この画像の中心にある星は，観測開始後 420 日頃から明るくなり，432 日頃最大光度となり，以後徐々にもとの明るさに戻った．左右の図はその前後 45 日の観測結果．この例は $0.1M_\odot$ 程度の MACHO によって引き起こされたものと推定される．

---

[11] C.Alcock et al. Nature **365** (1993) 621.

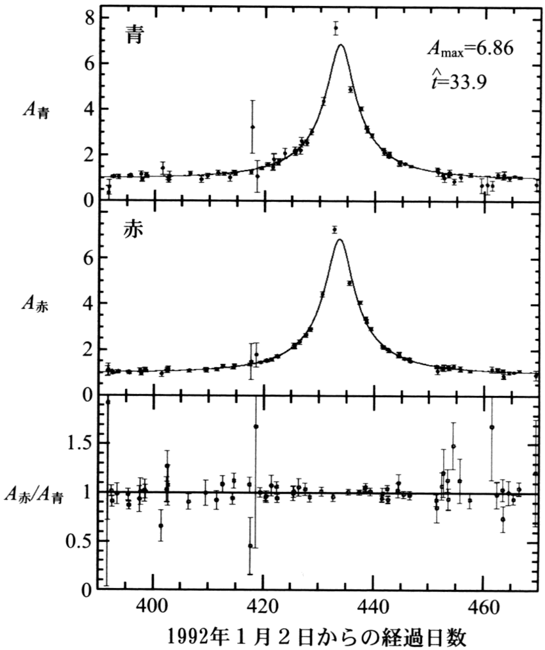


図 5.18 図 5.17 の光度曲線．上：青側バンド (4500Å〜6300Å) での光度曲線，中：赤側バンド (6300Å〜7600Å) での光度曲線，下：青側と赤側の光度の比．光度曲線が色に依存せず同じであることが変光星ではなく，重力レンズによるものであることを示唆する．

の最大値が $A_{\max}=6.86$ なので，(5.103) 式よりレンズ天体にもっとも接近したときの角距離 θ_{s0} をアインシュタイン角半径で割った $x_{\min}=\theta_{s0}/\theta_{\rm E}$ の値は 0.15 と推定される．この場合，アインシュタイン角半径内にとどまっている時間 (観測的には $A>3/\sqrt{5}$ となっている時間で 33.9 日間であったことが報告されている) は，図 5.14 と (5.101) 式を参照すれば

$$\Delta t = 2\frac{\sqrt{\theta_{\rm E}^2-\theta_{s0}^2}}{u_{\rm L}} \approx 2\sqrt{1-0.15^2}\,\Delta t_{\rm EL}$$

$$\approx 40\sqrt{\frac{M}{0.1M_\odot}}\sqrt{\frac{R}{10{\rm kpc}}}\left(\frac{200{\rm km\,s^{-1}}}{v_{\rm L}}\right)\text{日} \qquad (5.119)$$

と計算できる．これを 34 日間と等値すれば，我々から $R=10$kpc の位置で速度 $v_{\rm L}=$

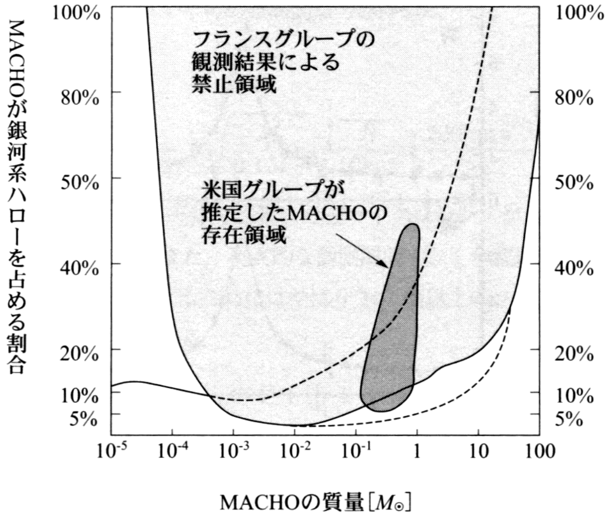


図 5.19　銀河系 MACHO の存在量に対する観測的制限.

200km s^{-1} で運動しているという典型的なレンズ天体の場合，その質量は $0.1M_\odot$ であることが推定できる.

米国グループは，1992 年 7 月から 1999 年 12 月のうちの 5 年 7 カ月の観測データから，銀河系の質量の約 20 パーセントが，典型的には $0.2M_\odot$ 程度の質量を持つ MACHO で占められているとする結果を出している．一方，フランスのグループは 1996 年 7 月から 2003 年 2 月のうちの 6 年 7 カ月にわたる観測データの解析の結果，従来重力マイクロレンズ候補であると考えられていたもののいくつかを否定し，MACHO 天体が銀河系の全質量に占める割合は 1 割以下であるという上限値を得た (図 5.19 参照).

通常の物質であるバリオンが銀河系の暗黒物質であると仮定した場合には，この MACHO 天体として分布している可能性が高い．その一方で，MACHO 天体の存在量に関してはまだ議論があるものの，銀河系の全質量を説明することができないことは確実である．以上の結果をまとめると，銀河系にはバリオン暗黒物質が存在するとしてもそれらはむしろ例外で，銀河系に付随する暗黒物質の大半はやはりバリオン以外の何者かであることが結論される.

例題集

A　計量テンソルの行列式と 4 元ベクトルの発散

A.1　計量テンソル $g_{\alpha\beta}$ の行列式：

$$g \equiv \det(g_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{A.1}$$

に対して

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} \tag{A.2}$$

を導け．必要であれば，$g_{\alpha\beta}$ の余因子行列 $\widetilde{g}^{\alpha\beta}$ が満たす式：

$$\widetilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = g\delta^\mu{}_\alpha \tag{A.3}$$

を既知として用いてよい．ここで $\widetilde{g}^{\alpha\beta}$ は，$g_{\alpha\beta}$ の第 $(\alpha+1)$ 行と第 $(\beta+1)$ 列とを除いてできる行列式に $(-1)^{\alpha+\beta}$ をかけてできる余因子のつくる行列である．

解　(A.3) 式より

$$\widetilde{g}^{\mu\nu} = g g^{\mu\nu} \tag{A.4}$$

であることがわかる．g の x^μ に関する偏微分はすべて $g_{\alpha\beta}$ に関する偏微分を通じて得られるので，

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu} = \frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \underbrace{=}_{(A.3)\text{ 式}} \widetilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \underbrace{=}_{(A.4)\text{ 式}} g g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \tag{A.5}$$

が成り立つ．$g < 0$ であることを考慮すると，この式は

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} = g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{A.6}$$

と変形される．これが (A.2) 式の 1 つめの等式である．さらにクリストッフェル記号は計量テンソルを用いて

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}) \tag{A.7}$$

と書けるから

$$2\Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} = g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\mu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\nu}) = g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \tag{A.8}$$

となり，(A.2) 式の 2 つめの等式が示された．

ちなみに (A.3) 式は次のようにして証明できる．まず，$g_{\nu\mu}$ を行列としてみたときに，その μ 列の成分をすべて α 列の成分に置き換えた行列の行列式を $a^\mu{}_\alpha$ とする．この定義よりその対角成分 $a^0{}_0 = a^1{}_1 = a^2{}_2 = a^3{}_3$ はいずれも g となる．一方，非対角成分としてたとえば $a^1{}_2$ を考えると

$$a^1{}_2 = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{12} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{22} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{32} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{A.9}$$

であるが，これは行列式の定義より 0 である．一方，この行列式を余因子展開すれば

$$a^1{}_2 = \tilde{g}^{1\nu}g_{\nu 2} \tag{A.10}$$

と書ける[1]．この具体例が示すように，$\mu \neq \alpha$ の場合 (A.3) 式の左辺は 0 となる．以上より，(A.3) 式が証明された．

A.2 (A.2) 式を用いて反変ベクトルの発散が次式を満たすことを示せ．

$$A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}A^\mu). \tag{A.11}$$

解 (A.2) 式を用いて (A.11) 式の右辺を変形すれば

$$A^\mu{}_{,\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{-1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial x^\mu}A^\mu = A^\mu{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}A^\mu. \tag{A.12}$$

これは (A.11) 式の左辺である $A^\mu{}_{;\mu}$ の定義そのものである．

A.3 (A.11) 式を用いて共変化されたダランベルシアンの表式が

---

[1] 余因子展開についてこれ以上説明するスペースはないので，必要であれば身近にある線形代数の教科書で適宜復習してほしい．

$$\nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \tag{A.13}$$

と書けることを示せ．この表式を利用して，極座標での 3 次元ラプラシアンを書き下せ．

解　共変性は別に相対論だけで重要なのではなく，デカルト座標における演算子を曲線座標で表示する場合などでも役に立つことを示す例である．

(A.11) 式の A^μ としてスカラー量 f の共変微分を選んで，$f^{;\mu} = g^{\mu\nu} f_{,\nu}$ を代入すればよい．

$$f^{;\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} f^{,\mu}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right). \tag{A.14}$$

したがって，(A.13) 式：

$$\nabla_\mu \nabla^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right). \tag{A.15}$$

が導かれた．

(A.13) を 3 次元の場合に用いると，ラプラシアンの一般座標での表式は

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \tag{A.16}$$

ここで g は g_{ij} の行列式 $\det(g_{ij})$ である．具体的に極座標

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{A.17}$$

に対しては

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

なので，$\sqrt{g} = r^2 \sin\theta$．これを (A.16) 式に代入すると

$$\Delta = \frac{1}{r^2\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \right] \tag{A.19}$$

となり，なじみぶかい結果：

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{aligned} \tag{A.20}$$

が容易に導かれる.

A.4 任意の 2 階対称テンソル $T_{\mu\nu}(=T_{\nu\mu})$ に対して

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\alpha} \tag{A.21}$$

が成り立つことを示せ.

解 定義より

$$\begin{aligned}T^{\mu}{}_{\nu;\alpha}&=T^{\mu}{}_{\nu,\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}T^{\beta}{}_{\nu}-\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}T^{\mu}{}_{\beta}\\&=T^{\mu}{}_{\nu,\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}T^{\beta}{}_{\nu}-\Gamma_{\beta\nu\alpha}T^{\mu\beta}\end{aligned} \tag{A.22}$$

なので，$\alpha=\mu$ の場合

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu}=T^{\mu}{}_{\nu,\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu}T^{\beta}{}_{\nu}-\Gamma_{\beta\nu\mu}T^{\mu\beta}. \tag{A.23}$$

例題 A.2 と同様に，上式の第 1 項と第 2 項は

$$T^{\mu}{}_{\nu,\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\beta\mu}T^{\beta}{}_{\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}} \tag{A.24}$$

にまとめられる．残る第 3 項は $T^{\mu\beta}=T^{\beta\mu}$ を用いると

$$-\Gamma_{\beta\nu\mu}T^{\mu\beta}=\frac{1}{2}(g_{\nu\mu,\beta}-g_{\beta\nu,\mu}-g_{\beta\mu,\nu})T^{\mu\beta}=-\frac{1}{2}g_{\beta\mu,\nu}T^{\mu\beta}. \tag{A.25}$$

したがって (A.21) 式：

$$T^{\mu}{}_{\nu;\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\alpha} \tag{A.26}$$

が証明された.

B 変分原理を用いたアインシュタイン方程式の導出

以下の設問にしたがって，アインシュタイン-ヒルベルト作用：

$$S_g\equiv\frac{1}{16\pi G}\int(R-2\Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x \tag{B.1}$$

から変分原理によってアインシュタイン方程式の左辺が導かれることを示せ.

B.1 $g^{\mu\nu}\longrightarrow\tilde{g}^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+\delta g^{\mu\nu}$ という変分を考える．例題 A の (A.2) 式を用いて

$$\delta(\sqrt{-g})=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\;g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{B.2}$$

を示せ.

解　例題 A の (A.2) 式より

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \tag{B.3}$$

また

$$\delta(g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) = \delta g^{\alpha\beta}\ g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\ \delta g_{\alpha\beta} = \delta(\delta^\alpha_\alpha) = 0 \tag{B.4}$$

より

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{B.5}$$

したがって

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\ g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{B.6}$$

B.2　この変分に対応して，クリストッフェル記号が

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \longrightarrow \widetilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \tag{B.7}$$

のように変化したとする．このときクリストッフェル記号の変分である $\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ はその添字に対応したテンソルとして振る舞うことを示せ．

解　$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ と $\widetilde{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma}$ はともにクリストッフェル記号の変換則

$$\Gamma^{\gamma'}{}_{\lambda'\rho'} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\rho'}} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\rho'}} \tag{B.8}$$

に従う．したがってその差 $\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ に対しては，上式第 2 項は相殺するので，通常のテンソルの変換則と一致する．

B.3　(B.2) 式を用いて，$g^{\mu\nu} \longrightarrow \widetilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ という変分に対して

$$\delta(R\sqrt{-g}) = (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu})\sqrt{-g}\ \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \tag{B.9}$$

を示せ．

解

$$\begin{aligned}
\delta(R\sqrt{-g}) &= \delta(R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g}) \\
&= \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta(\sqrt{-g}) \\
&= (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu})\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\ g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

B.4　$\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ を用いると，

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\gamma})_{;\alpha} \tag{B.11}$$

と変形できることを示せ.

解 $R_{\mu\nu}$ を変分すると

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\ \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\gamma} \\ - \delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha}\ \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\gamma}.\end{aligned} \tag{B.12}$$

$\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ はテンソルなので，その共変微分は

$$\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} = \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\alpha}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\gamma}{}_{\nu\alpha}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}, \tag{B.13}$$

$$\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha;\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\nu}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\gamma}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}. \tag{B.14}$$

これらの差をとると，(B.12) 式の右辺と一致するので

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha;\nu}. \tag{B.15}$$

最後に $g^{\mu\nu}$ は共変微分に対して定数であることに注意すると，(B.11) 式を得る.

B.5 (B.11) 式の最後の項に例題 A の (A.11) 式を応用して，$\delta S_g = 0$ が真空中のアインシュタイン方程式に帰着することを示せ.

解 (B.11) 式を

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\gamma})_{;\alpha} \equiv W^{\alpha}{}_{;\alpha} \tag{B.16}$$

と置く．例題 A の (A.11) 式を用いれば，

$$\begin{aligned}\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\, d^4x = \int \frac{\partial(\sqrt{-g}W^{\alpha})}{\partial x^{\alpha}}\, d^4x \underbrace{=}_{\text{ガウスの定理}} \int (\sqrt{-g}W^{\alpha})dS_{\alpha} \\ = \int (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\gamma})\, dS_{\alpha}\end{aligned} \tag{B.17}$$

と表面積分に変形できる．変分の境界では $\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$ であるから，この表面積分は 0 となる．以上まとめると，

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \frac{1}{16\pi G}\ \delta\int (R - 2\Lambda)\sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\, d^4x = 0 \\ &\Longrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0\end{aligned} \tag{B.18}$$

であることが示された.

C　球対称時空に対するクリストッフェル記号

球対称時空の線素を

$$d\tau^2 = e^{2\phi(r,t)}\,dt^2 - e^{2\lambda(r,t)}\,dr^2 - \chi^2(r,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{C.1}$$

と書く．この計量に対するアインシュタイン方程式を導くには，まずクリストッフェル記号を求め，それからリッチテンソル，さらにスカラー曲率を計算する必要がある．クリストッフェル記号は $g_{\mu\nu}$ から直接

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma} \\ &= g^{\alpha\mu}\frac{1}{2}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right) \end{aligned} \tag{C.2}$$

を用いて計算することもできるが，対称性の高い時空の場合，長々と計算した挙げ句ほとんどの成分が 0 になり虚しい思いをする．変分法を使うと計算を少しだけ効率的に行うことができる．

作用を

$$\begin{aligned} S &= -\int I\,d\tau, \\ I &\equiv e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - \chi^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \end{aligned} \tag{C.3}$$

と書く．これを τ に関して変分した結果はオイラー-ラグランジュ方程式：

$$\frac{\partial I}{\partial x^{\mu}} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dx^{\mu}/d\tau)} \tag{C.4}$$

に帰着するので，$\mu = t, r, \theta, \varphi$ に対する 4 つの式が得られる[2)]．その結果を測地線の式

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0 \tag{C.5}$$

と比較して，対応する項から $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を読み取ればよい．以下，t と r に対する微分をそれぞれ ˙ と ′ で記すことにして，(C.4) 式を具体的に計算してみよう．

C.1　(C.4) 式の $\mu = t$ 成分を書き下し，$\Gamma^{t}{}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ．

---

2) あまり美しい記法とは言えないが，わかりやすさのために $\mu = 0$ の代わりに直接 t を添字にすることがある．$x^t = t$ や $x^{\theta} = \theta$ と書かれると違和感があるが，$\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}$ ならば $\Gamma^{2}{}_{33}$ よりも対応が明確であろう．

解

$$\frac{\partial I}{\partial t}=2\dot{\phi}e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-2\dot{\lambda}e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-2\dot{\chi}\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-2\dot{\chi}\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dt/d\tau)}=\frac{d}{d\tau}\left(2e^{2\phi}\frac{dt}{d\tau}\right)=2\left(2\dot{\phi}\frac{dt}{d\tau}+2\phi'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\phi}\frac{dt}{d\tau}+2e^{2\phi}\frac{d^2t}{d\tau^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}+\dot{\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+2\phi'\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}$$
$$+\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2+\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=0. \tag{C.6}$$

したがって，0 ではない ${\Gamma^t}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$\begin{aligned}&{\Gamma^t}_{tt}=\dot{\phi},\quad {\Gamma^t}_{rr}=\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi},\quad {\Gamma^t}_{rt}={\Gamma^t}_{tr}=\phi',\\ &{\Gamma^t}_{\theta\theta}=\dot{\chi}\chi e^{-2\phi},\quad {\Gamma^t}_{\varphi\varphi}=\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{C.7}$$

C.2 (C.4) 式の $\mu=r$ 成分を書き下し，${\Gamma^r}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ．

解

$$\frac{\partial I}{\partial r}=2\phi'e^{2\phi}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-2\lambda'e^{2\lambda}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2-2\chi'\chi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-2\chi'\chi\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(dr/d\tau)}=\frac{d}{d\tau}\left(-2e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau}\right)=-2\left(2\dot{\lambda}\frac{dt}{d\tau}+2\lambda'\frac{dr}{d\tau}\right)e^{2\lambda}\frac{dr}{d\tau}-2e^{2\lambda}\frac{d^2r}{d\tau^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}+\lambda'\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\phi'e^{2\phi-2\lambda}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+2\dot{\lambda}\frac{dr}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}$$
$$-\chi'\chi e^{-2\lambda}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2-\chi'\chi\sin^2\theta e^{-2\lambda}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=0. \tag{C.8}$$

したがって，0 ではない ${\Gamma^r}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$\begin{aligned}&{\Gamma^r}_{rr}=\lambda',\quad {\Gamma^r}_{tt}=\phi'e^{2\phi-2\lambda},\quad {\Gamma^r}_{rt}={\Gamma^r}_{tr}=\dot{\lambda},\\ &{\Gamma^r}_{\theta\theta}=-\chi'\chi e^{-2\lambda},\quad {\Gamma^r}_{\varphi\varphi}=-\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta.\end{aligned} \tag{C.9}$$

C.3 (C.4) 式の $\mu=\theta$ 成分を書き下し，${\Gamma^\theta}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ．

解

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = -2\chi^2 \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(d\theta/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2\chi^2\frac{d\theta}{d\tau}\right) = -4\dot{\chi}\chi\frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - 4\chi'\chi\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - 2\chi^2\frac{d^2\theta}{d\tau^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2\dot{\chi}}{\chi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{2\chi'}{\chi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 0. \tag{C.10}$$

したがって，0 ではない ${\Gamma^\theta}_{\alpha\beta}$ の成分は

$${\Gamma^\theta}_{t\theta} = {\Gamma^\theta}_{\theta t} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}, \quad {\Gamma^\theta}_{r\theta} = {\Gamma^\theta}_{\theta r} = \frac{\chi'}{\chi}, \quad {\Gamma^\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta. \tag{C.11}$$

C.4 (C.4) 式の $\mu = \varphi$ 成分を書き下し，${\Gamma^\varphi}_{\alpha\beta}$ の 0 でない成分を求めよ．

解

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial I}{\partial(d\theta/d\tau)} = \frac{d}{d\tau}\left(-2\chi^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{d\tau}\right)$$

$$= -2\left(2\dot{\chi}\chi\sin^2\theta\frac{dt}{d\tau} + 2\chi'\chi\sin^2\theta\frac{dr}{d\tau} + 2\chi^2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{d\tau}\right)\frac{d\varphi}{d\tau}$$

$$-2\chi^2\sin^2\theta\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{2\dot{\chi}}{\chi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{2\chi'}{\chi}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau} = 0. \tag{C.12}$$

したがって，0 ではない ${\Gamma^\varphi}_{\alpha\beta}$ の成分は

$$\begin{aligned}&{\Gamma^\varphi}_{t\varphi} = {\Gamma^\varphi}_{\varphi t} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}, \quad {\Gamma^\varphi}_{r\varphi} = {\Gamma^\varphi}_{\varphi r} = \frac{\chi'}{\chi},\\ &{\Gamma^\varphi}_{\theta\varphi} = {\Gamma^\varphi}_{\varphi\theta} = \cot\theta.\end{aligned} \tag{C.13}$$

D　球対称時空に対するアインシュタインテンソル

球対称時空：

$$ds^2 = -e^{2\phi(r,t)}\,dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}\,dr^2 + \chi^2(r,t)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{D.1}$$

に対するクリストッフェル記号の 0 でない成分は表 D.1 の通りである．

対応するアインシュタインテンソルを具体的に計算してみよう．ちなみに，必要な

表 D.1 球対称計量に対するクリストッフェル記号.

Γ	t	r	θ	φ
tt	$\dot{\phi}$	$\phi' e^{2\phi-2\lambda}$	0	0
tr	ϕ'	$\dot{\lambda}$	0	0
$t\theta$	0	0	$\dot{\chi}/\chi$	0
$t\varphi$	0	0	0	$\dot{\chi}/\chi$
rr	$\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}$	λ'	0	0
$r\theta$	0	0	χ'/χ	0
$r\varphi$	0	0	0	χ'/χ
$\theta\theta$	$\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}$	0	0
$\theta\varphi$	0	0	0	$\cot\theta$
$\varphi\varphi$	$\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^2\theta$	$-\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^2\theta$	$-\sin\theta\cos\theta$	0

公式は

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\nu}, \tag{D.2}$$

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\mu}, \tag{D.3}$$

$$R = R^{\mu}{}_{\mu}, \tag{D.4}$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \tag{D.5}$$

である.

D.1 リッチテンソル R_{tt} を求めよ.

解 まずリッチテンソルの公式より

$$R_{tt} = \partial_\mu \Gamma^{\mu}{}_{tt} - \partial_t \Gamma^{\mu}{}_{t\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{tt} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma t}\Gamma^{\gamma}{}_{t\mu}. \tag{D.6}$$

クリストッフェル記号の 0 でない成分を代入すれば,

第 1 項 : $\partial_t \Gamma^{t}{}_{tt} + \partial_r \Gamma^{r}{}_{tt} = \ddot{\phi} + \partial_r(\phi' e^{2\phi-2\lambda})$

$$= \ddot{\phi} + (\phi'' + 2\phi'^2 - 2\phi'\lambda')e^{2\phi-2\lambda}, \tag{D.7}$$

第 2 項 : $-\partial_t(\Gamma^{t}{}_{tt} + \Gamma^{r}{}_{tr} + \Gamma^{\theta}{}_{t\theta} + \Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi})$

$$= -\partial_t(\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi) = -\ddot{\phi} - \ddot{\lambda} - 2\ddot{\chi}/\chi + 2\dot{\chi}^2/\chi^2, \tag{D.8}$$

第 3 項 : $\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}\Gamma^{t}{}_{tt} + \Gamma^{\mu}{}_{r\mu}\Gamma^{r}{}_{tt}$

$$= (\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi)\dot{\phi} + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\phi' e^{2\phi-2\lambda}, \tag{D.9}$$

第 4 項 $:-\Gamma^{\mu}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{t\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{rt}\Gamma^{r}{}_{t\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\theta t}\Gamma^{\theta}{}_{t\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\varphi t}\Gamma^{\varphi}{}_{t\mu}$

$$
\begin{aligned}
&=-(\Gamma^{t}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{tt}+\Gamma^{r}{}_{tt}\Gamma^{t}{}_{tr})-(\Gamma^{t}{}_{rt}\Gamma^{r}{}_{tt}+\Gamma^{r}{}_{rt}\Gamma^{r}{}_{tr})\\
&\quad-\Gamma^{\theta}{}_{\theta t}\Gamma^{\theta}{}_{t\theta}-\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi t}\Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi}\\
&=-\dot{\phi}^2-2\phi'^2e^{2\phi-2\lambda}-\dot{\lambda}^2-2\dot{\chi}^2/\chi^2.
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow R_{tt}&=-\ddot{\lambda}-\dot{\lambda}^2+\dot{\phi}\dot{\lambda}+\frac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi}-\frac{2\ddot{\chi}}{\chi}\\
&\quad+\left(\phi''+\phi'^2-\lambda'\phi'+\frac{2\chi'\phi'}{\chi}\right)e^{2\phi-2\lambda}.
\end{aligned}
\tag{D.11}
$$

D.2 R_{tr} を求めよ.

解

$$R_{tr}=\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{tr}-\partial_r\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{tr}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma r}\Gamma^{\gamma}{}_{t\mu}. \tag{D.12}$$

第 1 項 $:\partial_t\Gamma^{t}{}_{tr}+\partial_r\Gamma^{r}{}_{tr}=\dot{\phi}'+\dot{\lambda}',$ (D.13)

第 2 項 $:-\partial_r(\dot{\phi}+\dot{\lambda}+2\dot{\chi}/\chi)=-\dot{\phi}'-\dot{\lambda}'-2\dot{\chi}'/\chi+2\dot{\chi}\chi'/\chi^2,$ (D.14)

第 3 項 $:\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}\Gamma^{t}{}_{tr}+\Gamma^{\mu}{}_{r\mu}\Gamma^{r}{}_{tr}$

$$=(\dot{\phi}+\dot{\lambda}+2\dot{\chi}/\chi)\phi'+(\phi'+\lambda'+2\chi'/\chi)\dot{\lambda}, \tag{D.15}$$

第 4 項 $:-\Gamma^{t}{}_{\gamma r}\Gamma^{\gamma}{}_{tt}-\Gamma^{r}{}_{\gamma r}\Gamma^{\gamma}{}_{tr}-\Gamma^{\theta}{}_{\gamma r}\Gamma^{\gamma}{}_{t\theta}-\Gamma^{\varphi}{}_{\gamma r}\Gamma^{\gamma}{}_{t\varphi}$

$$
\begin{aligned}
&=-\Gamma^{t}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{tt}-\Gamma^{t}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{tt}-\Gamma^{r}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{tr}-\Gamma^{r}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{tr}\\
&\quad-\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}\Gamma^{\theta}{}_{t\theta}-\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r}\Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi}\\
&=-\dot{\phi}\phi'-2\dot{\lambda}\phi'-\dot{\lambda}\lambda'-2\dot{\chi}\chi'/\chi^2.
\end{aligned}
\tag{D.16}
$$

$$\Longrightarrow R_{tr}=\frac{2}{\chi}(\dot{\chi}\phi'+\dot{\lambda}\chi'-\dot{\chi}'). \tag{D.17}$$

D.3 $R_{t\theta}$ を求めよ.

解

$$R_{t\theta}=\underbrace{\partial_\mu\Gamma^{\mu}{}_{t\theta}}_{=0}-\underbrace{\partial_\theta\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}}_{=0}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{t\theta}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\theta}\Gamma^{\gamma}{}_{t\mu}$$

$$= \Gamma^{\mu}{}_{\theta\mu}\Gamma^{\theta}{}_{t\theta} - \underbrace{\Gamma^{t}{}_{\gamma\theta}\Gamma^{\gamma}{}_{tt}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{r}{}_{\gamma\theta}\Gamma^{\gamma}{}_{tr}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\theta}{}_{\gamma\theta}\Gamma^{\gamma}{}_{t\theta}}_{=0} - \Gamma^{\varphi}{}_{\gamma\theta}\Gamma^{\gamma}{}_{t\varphi}$$

$$= \Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{t\theta} - \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi} = \frac{\dot{\chi}}{\chi}\cot\theta - \frac{\dot{\chi}}{\chi}\cot\theta = 0. \tag{D.18}$$

D.4 $R_{t\varphi}$ を求めよ.

解

$$R_{t\varphi} = \underbrace{\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{t\varphi}}_{=0} - \underbrace{\partial_{\varphi}\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}}_{=0} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{t\varphi} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\varphi}\Gamma^{\gamma}{}_{t\mu}$$

$$= \underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\mu}}_{=0}\Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi} - \underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{t\varphi}\Gamma^{t}{}_{t\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{r\varphi}\Gamma^{r}{}_{t\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{t\mu}}_{=0} - \underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{t\mu}}_{=0}$$

$$= 0. \tag{D.19}$$

D.5 R_{rr} を求めよ.

解

$$R_{rr} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{rr} - \partial_{r}\Gamma^{\mu}{}_{r\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{rr} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma r}\Gamma^{\gamma}{}_{r\mu}. \tag{D.20}$$

第 1 項 ：$\partial_t\Gamma^{t}{}_{rr} + \partial_r\Gamma^{r}{}_{rr} = \partial_t(\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi}) + \lambda''$

$$= (\ddot{\lambda} + 2\dot{\lambda}^2 - 2\dot{\lambda}\dot{\phi})e^{2\lambda-2\phi} + \lambda'', \tag{D.21}$$

第 2 項 ：$-\partial_r(\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi) = -\phi'' - \lambda'' - 2\chi''/\chi + 2\chi'^2/\chi^2,$ (D.22)

第 3 項 ：$\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}\Gamma^{t}{}_{rr} + \Gamma^{\mu}{}_{r\mu}\Gamma^{r}{}_{rr}$

$$= (\dot{\phi} + \dot{\lambda} + 2\dot{\chi}/\chi)\dot{\lambda}e^{2\lambda-2\phi} + (\phi' + \lambda' + 2\chi'/\chi)\lambda', \tag{D.23}$$

第 4 項 ：$-\Gamma^{\mu}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{r\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{r\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\theta r}\Gamma^{\theta}{}_{r\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\varphi r}\Gamma^{\varphi}{}_{r\mu}$

$$= -(\Gamma^{t}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{rt} + \Gamma^{r}{}_{tr}\Gamma^{t}{}_{rr}) - (\Gamma^{t}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{rt} + \Gamma^{r}{}_{rr}\Gamma^{r}{}_{rr})$$

$$- \Gamma^{\theta}{}_{\theta r}\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} - \Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r}\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi}$$

$$= -\phi'^2 - 2\dot{\lambda}^2e^{2\lambda-2\phi} - \lambda'^2 - 2\chi'^2/\chi^2. \tag{D.24}$$

$$\Longrightarrow R_{rr} = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \frac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \frac{2\chi''}{\chi}$$

$$+\left(\ddot{\lambda}+\dot{\lambda}^2-\dot{\lambda}\dot{\phi}+\frac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right)e^{2\lambda-2\phi}. \tag{D.25}$$

D.6 $R_{r\theta}$ を求めよ．

解

$$R_{r\theta}=\underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{r\theta}}_{=0}-\underbrace{\partial_\theta \Gamma^\mu{}_{r\mu}}_{=0}+\Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{r\theta}-\Gamma^\mu{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{r\mu}$$

$$=\Gamma^\mu{}_{\theta\mu}\Gamma^\theta{}_{r\theta}-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{t\theta}\Gamma^t{}_{r\mu}}_{=0}-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{r\theta}\Gamma^r{}_{r\mu}}_{=0}-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{\theta\theta}\Gamma^\theta{}_{r\mu}}_{=0}-\Gamma^\mu{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{r\mu}$$

$$=\Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{r\theta}-\Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi}=\frac{\dot{\chi}}{\chi}\cot\theta-\frac{\dot{\chi}}{\chi}\cot\theta=0. \tag{D.26}$$

D.7 $R_{r\varphi}$ を求めよ．

解

$$R_{r\varphi}=\underbrace{\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{r\varphi}}_{=0}-\underbrace{\partial_\varphi \Gamma^\mu{}_{r\mu}}_{=0}+\Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{r\varphi}-\Gamma^\mu{}_{\gamma\varphi}\Gamma^\gamma{}_{r\mu}$$

$$=\underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\mu}}_{=0}\Gamma^\varphi{}_{r\varphi}-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{t\varphi}\Gamma^t{}_{r\mu}}_{=0}-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{r\varphi}\Gamma^r{}_{r\mu}}_{=0}$$

$$-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{\theta\varphi}\Gamma^\theta{}_{r\mu}}_{=0}-\underbrace{\Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi{}_{r\mu}}_{=0}=0. \tag{D.27}$$

D.8 $R_{\theta\theta}$ を求めよ．

解

$$R_{\theta\theta}=\partial_\mu \Gamma^\mu{}_{\theta\theta}-\partial_\theta \Gamma^\mu{}_{\theta\mu}+\Gamma^\mu{}_{\gamma\mu}\Gamma^\gamma{}_{\theta\theta}-\Gamma^\mu{}_{\gamma\theta}\Gamma^\gamma{}_{\theta\mu}. \tag{D.28}$$

第 1 項 ：$\partial_t \Gamma^t{}_{\theta\theta}+\partial_r \Gamma^r{}_{\theta\theta}=\partial_t(\dot{\chi}\chi e^{-2\phi})-\partial_r(\chi'\chi e^{-2\lambda})$

$$=(\ddot{\chi}\chi+\dot{\chi}^2-2\dot{\phi}\dot{\chi}\chi)e^{-2\phi}-(\chi''\chi+\chi'^2-2\lambda'\chi'\chi)e^{-2\lambda}, \tag{D.29}$$

第 2 項 ：$-\partial_\theta \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}=-\partial_\theta \cot\theta=1/\sin^2\theta,$ (D.30)

第 3 項 ：$\Gamma^\mu{}_{t\mu}\Gamma^t{}_{\theta\theta}+\Gamma^\mu{}_{r\mu}\Gamma^r{}_{\theta\theta}$

$$=(\dot{\phi}+\dot{\lambda}+2\dot{\chi}/\chi)\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}-(\phi'+\lambda'+2\chi'/\chi)\chi'\chi e^{-2\lambda}, \tag{D.31}$$

$$\text{第 4 項}\ :-\Gamma^{\mu}{}_{t\theta}\Gamma^{t}{}_{\theta\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\mu}$$

$$=-\Gamma^{\theta}{}_{t\theta}\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}-\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}-(\Gamma^{t}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta t}+\Gamma^{r}{}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\theta r})$$

$$-\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}$$

$$=-2\dot{\chi}^{2}e^{-2\phi}+2\chi'^{2}e^{-2\lambda}-\cot^{2}\theta \tag{D.32}$$

$$\Longrightarrow R_{\theta\theta}=(\ddot{\chi}\chi+\dot{\chi}^{2}-\dot{\phi}\dot{\chi}\chi+\dot{\lambda}\dot{\chi}\chi)e^{-2\phi}$$

$$-(\chi''\chi+\chi'^{2}-\lambda'\chi'\chi+\phi'\chi'\chi)e^{-2\lambda}+1. \tag{D.33}$$

D.9 $R_{\theta\varphi}$ を求めよ．

解

$$R_{\theta\varphi}=\underbrace{\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\theta\varphi}}_{=0}-\underbrace{\partial_{\varphi}\Gamma^{\mu}{}_{\theta\mu}}_{=0}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\theta\varphi}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\varphi}\Gamma^{\gamma}{}_{\theta\mu}$$

$$=\underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\mu}}_{=0}\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}-\underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{t\varphi}\Gamma^{t}{}_{\theta\mu}}_{=0}-\underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{r\varphi}\Gamma^{r}{}_{\theta\mu}}_{=0}-\underbrace{\Gamma^{\mu}{}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{\theta\mu}}_{=0}=0. \tag{D.34}$$

D.10 $R_{\varphi\varphi}$ を求めよ．

解

$$R_{\varphi\varphi}=\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\varphi}-\underbrace{\partial_{\varphi}\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\mu}}_{=0}+\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\mu}{}_{\gamma\varphi}\Gamma^{\gamma}{}_{\varphi\mu}. \tag{D.35}$$

$$\text{第 1 項}\ :\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\varphi}=\partial_{t}\Gamma^{t}{}_{\varphi\varphi}+\partial_{r}\Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi}+\partial_{\theta}\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}$$

$$=\partial_{t}(\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^{2}\theta)-\partial_{r}(\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^{2}\theta)-\partial_{\theta}(\sin\theta\cos\theta), \tag{D.36}$$

$$\text{第 3 項}\ :\Gamma^{\mu}{}_{t\mu}\Gamma^{t}{}_{\varphi\varphi}+\Gamma^{\mu}{}_{r\mu}\Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi}+\Gamma^{\mu}{}_{\theta\mu}\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}$$

$$=(\dot{\phi}+\dot{\lambda}+2\dot{\chi}/\chi)\dot{\chi}\chi e^{-2\phi}\sin^{2}\theta$$

$$-(\phi'+\lambda'+2\chi'/\chi)\chi'\chi e^{-2\lambda}\sin^{2}\theta-\cot\theta\sin\theta\cos\theta, \tag{D.37}$$

$$\text{第 4 項}\ :-\Gamma^{\mu}{}_{t\varphi}\Gamma^{t}{}_{\varphi\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{r\varphi}\Gamma^{r}{}_{\varphi\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\mu}-\Gamma^{\mu}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\mu}$$

$$=-\Gamma^{\varphi}{}_{t\varphi}\Gamma^{t}{}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\varphi}{}_{r\varphi}\Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\varphi}{}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}$$

$$-(\Gamma^{t}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi t}+\Gamma^{r}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi r}+\Gamma^{\theta}{}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}{}_{\varphi\theta})$$

$$=-2\dot{\chi}^{2}e^{-2\phi}\sin^{2}\theta+2\chi'^{2}e^{-2\lambda}\sin^{2}\theta+2\cot\theta\sin\theta\cos\theta, \tag{D.38}$$

$$\Longrightarrow R_{\varphi\varphi} = (\ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}^2 - \dot{\phi}\dot{\chi}\chi + \dot{\lambda}\dot{\chi}\chi)e^{-2\phi}\sin^2\theta$$
$$- (\chi''\chi + \chi'^2 - \lambda'\chi'\chi + \phi'\chi'\chi)e^{-2\lambda}\sin^2\theta + \sin^2\theta. \tag{D.39}$$

D.11 リッチスカラー R を求めよ.

解 今までの結果より 0 でない成分は

$$\begin{cases} R_{tt} = -\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 + \dot{\phi}\dot{\lambda} + \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} - \dfrac{2\ddot{\chi}}{\chi} \\ \qquad + \left(\phi'' + \phi'^2 - \lambda'\phi' + \dfrac{2\chi'\phi'}{\chi}\right)e^{2\phi-2\lambda}, \\ R_{tr} = \dfrac{2}{\chi}(\dot{\chi}\phi' + \dot{\lambda}\chi' - \dot{\chi}'), \\ R_{rr} = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' + \dfrac{2\chi'\phi'}{\chi} - \dfrac{2\chi''}{\chi} \\ \qquad + \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\phi} + \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right)e^{2\lambda-2\phi}, \\ R_{\theta\theta} = (\ddot{\chi}\chi + \dot{\chi}^2 - \dot{\phi}\dot{\chi}\chi + \dot{\lambda}\dot{\chi}\chi)e^{-2\phi} \\ \qquad - (\chi''\chi + \chi'^2 - \lambda'\chi'\chi + \phi'\chi'\chi)e^{-2\lambda} + 1, \\ R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}. \end{cases} \tag{D.40}$$

したがって,

$$A = \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\phi}\dot{\lambda}, \quad B = -\phi'' - \phi'^2 + \lambda'\phi' \tag{D.41}$$

とおけば,

$$\begin{cases} R^t{}_t = \left(A - \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \dfrac{2\ddot{\chi}}{\chi}\right)e^{-2\phi} + \left(B - \dfrac{2\chi'\phi'}{\chi}\right)e^{-2\lambda}, \\ R^r{}_r = \left(B + \dfrac{2\chi'\lambda'}{\chi} - \dfrac{2\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda} + \left(A + \dfrac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi}\right)e^{-2\phi}, \\ R^\theta{}_\theta = R^\varphi{}_\varphi = \left(\dfrac{\ddot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\chi}^2}{\chi^2} - \dfrac{\dot{\phi}\dot{\chi}}{\chi} + \dfrac{\dot{\lambda}\dot{\chi}}{\chi}\right)e^{-2\phi} \\ \qquad - \left(\dfrac{\chi''}{\chi} + \dfrac{\chi'^2}{\chi^2} - \dfrac{\lambda'\chi'}{\chi} + \dfrac{\phi'\chi'}{\chi}\right)e^{-2\lambda} + \dfrac{1}{\chi^2}. \end{cases} \tag{D.42}$$

$$R = R^\mu{}_\mu = 2\left(A - \frac{2\dot{\chi}\dot{\phi}}{\chi} + \frac{2\ddot{\chi}}{\chi} + \frac{2\dot{\chi}\dot{\lambda}}{\chi} + \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi}$$

$$+2\left(B+\frac{2\chi'\lambda'}{\chi}-\frac{2\chi''}{\chi}-\frac{2\chi'\phi'}{\chi}-\frac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda}+\frac{2}{\chi^2}. \qquad \text{(D.43)}$$

D.12 アインシュタインテンソル $G^{\alpha}{}_{\beta}$ を求めよ．

解 今までの結果より

$$\begin{cases} G^t{}_t = -\left(\frac{2\dot\chi\dot\lambda}{\chi}+\frac{\dot\chi^2}{\chi^2}\right)e^{-2\phi}+\left(\frac{2\chi''}{\chi}+\frac{\chi'^2}{\chi^2}-\frac{2\chi'\lambda'}{\chi}\right)e^{-2\lambda}-\frac{1}{\chi^2}, \\ G^t{}_r = \frac{2e^{-2\phi}}{\chi}(\dot\chi'-\dot\chi\phi'-\dot\lambda\chi'), \\ G^r{}_r = \left(\frac{2\chi'\phi'}{\chi}+\frac{\chi'^2}{\chi^2}\right)e^{-2\lambda}-\left(\frac{2\ddot\chi}{\chi}+\frac{\dot\chi^2}{\chi^2}-\frac{2\dot\chi\dot\phi}{\chi}\right)e^{-2\phi}-\frac{1}{\chi^2}, \\ G^\theta{}_\theta = G^\varphi{}_\varphi = R^\theta{}_\theta-\frac{R}{2}=-\frac{1}{2}(R^t{}_t+R^r{}_r) \\ \quad = -\left(A-\frac{\dot\chi\dot\phi}{\chi}+\frac{\ddot\chi}{\chi}+\frac{\dot\chi\dot\lambda}{\chi}\right)e^{-2\phi}-\left(B-\frac{\chi'\phi'}{\chi}+\frac{\chi'\lambda'}{\chi}-\frac{\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda} \\ \quad = -\left(\ddot\lambda+\dot\lambda^2-\dot\phi\dot\lambda-\frac{\dot\chi\dot\phi}{\chi}+\frac{\ddot\chi}{\chi}+\frac{\dot\chi\dot\lambda}{\chi}\right)e^{-2\phi} \\ \qquad +\left(\phi''+\phi'^2-\lambda'\phi'+\frac{\chi'\phi'}{\chi}-\frac{\chi'\lambda'}{\chi}+\frac{\chi''}{\chi}\right)e^{-2\lambda}. \end{cases} \qquad \text{(D.44)}$$

これ以外の成分は 0 である．

E　ダスト球の重力収縮解

圧力が無視できる物質 (ダスト) で占められている球対称時空は

$$ds^2=-e^{2\phi(t)}dt^2+\left(\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{\partial\chi(r,t)}{\partial r}\right)^2dr^2+\chi^2(r,t)\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \qquad \text{(E.1)}$$

という線素で記述される．この場合，r という動径座標に対する“半径” $\chi(r,t)$ はニュートン力学の場合と同様の保存則：

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2-\frac{2Gm(r)}{\chi}=\Gamma^2(r)-1 \qquad \text{(E.2)}$$

にしたがうことが示される．これを既知として以下の問いに答えよ．

E.1 $\Gamma^2(r)=1$ の場合に (E.2) 式を積分して t を χ の関数として書き下せ．$\chi>0$ から $\chi=0$ へと収縮する場合を考えて，$\chi=0$ となる時刻を $t_0(r)$ とせよ．したがっ

てこの場合 $t < t_0(r)$ が成り立つ.

解 (E.2) 式より

$$\frac{\partial t}{\partial \chi} = -\frac{1}{\sqrt{2Gm/\chi + \Gamma^2 - 1}} = -\sqrt{\frac{\chi}{(\Gamma^2-1)\chi + 2Gm}}. \tag{E.3}$$

したがって $\Gamma^2 = 1$ の場合は容易に

$$t_0(r) - t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2Gm}}\chi^{3/2} = \sqrt{\frac{2}{9Gm}}\chi^{3/2}. \tag{E.4}$$

E.2 $\Gamma^2(r) > 1$ の場合に (E.2) 式を積分して t を χ の関数として書き下せ. 必要であれば積分公式

$$\int\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx = \sqrt{x(x+a)} + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\right|$$
$$= \sqrt{x(x+a)} - a\sinh^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} \quad (a>0) \tag{E.5}$$

を用いてよい.

解 $\Gamma^2 > 1$ の場合, (E.3) 式は

$$t = -\frac{1}{\sqrt{\Gamma^2-1}}\int\sqrt{\frac{\chi}{\chi+a}}, \quad a = \frac{2Gm}{\Gamma^2-1} \tag{E.6}$$

と変形できるから (E.5) 式を用いて

$$t_0(r) - t = \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2-1}}\sqrt{\chi^2 + \frac{2Gm}{\Gamma^2-1}\chi} - \frac{2Gm}{(\Gamma^2-1)^{3/2}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{(\Gamma^2-1)\chi}{2Gm}} \tag{E.7}$$

を得る.

E.3 $\Gamma^2(r) < 1$ の場合に (E.2) 式を積分して t を χ の関数として書き下せ. 必要であれば積分公式

$$\int\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx = -\sqrt{x(a-x)} + a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} \quad (a>0) \tag{E.8}$$

を用いてよい.

解 例題 E.2 とまったく同様にして今度は (E.8) 式を用いれば

$$t_0(r) - t = -\frac{\sqrt{2Gm\chi - (1-\Gamma^2)\chi^2}}{1-\Gamma^2} + \frac{2Gm}{(1-\Gamma^2)^{3/2}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{(1-\Gamma^2)\chi}{2Gm}} \tag{E.9}$$

が得られる.

E.4 $\chi \ll a$ では Γ^2 の値によらず

$$t_0(r) - t \approx \sqrt{\frac{2}{9Gm}}\chi^{3/2} \tag{E.10}$$

となることを示せ.

解 $x \ll a$ の場合, (E.5) 式と (E.8) 式の左辺はいずれも

$$\int\sqrt{\frac{x}{x+a}}\,dx \approx \int\sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx \approx \int\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3\sqrt{a}} \tag{E.11}$$

となるから $\Gamma^2 = 1$ の場合に帰着するのは自明である. また物理的にも (E.2) 式で $\chi \longrightarrow 0$ を考えると左辺の 2 つの項それぞれに比べて右辺の値は無視できるようになるので, 漸近的に $\Gamma^2 = 1$ の場合と同じ振舞をすることは容易に予想できる. しかし, あえて得られた解を近似的に展開して確かめるならば以下の通りである. まず

$$\sqrt{\frac{x}{a}} \equiv \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \approx y + \frac{y^3}{6} + \cdots \Longrightarrow y \approx \sqrt{\frac{x}{a}} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x}{a}}^3 \tag{E.12}$$

なので

$$\begin{aligned}\sqrt{x(x+a)} - a\sinh^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} &\approx \sqrt{ax}\left(1 + \frac{x}{2a} + \cdots\right) - a\sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{a}{6}\sqrt{\frac{x}{a}}^3 \\ &\approx \frac{2x^{3/2}}{3\sqrt{a}}.\end{aligned} \tag{E.13}$$

したがって (E.7) 式は

$$t_0(r) - t \approx \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 - 1}}\frac{2}{3}\chi^{3/2}\sqrt{\frac{\Gamma^2 - 1}{2Gm}} = \sqrt{\frac{2}{9Gm}}\chi^{3/2} \tag{E.14}$$

となり, (E.10) 式に帰着する. 同様にして

$$\sqrt{\frac{x}{a}} \equiv \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \approx y - \frac{y^3}{6} + \cdots \Longrightarrow y \approx \sqrt{\frac{x}{a}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x}{a}}^3 \tag{E.15}$$

より

$$-\sqrt{x(a-x)} + a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} \approx \frac{2x^{3/2}}{3\sqrt{a}}. \tag{E.16}$$

したがって (E.9) 式もまた (E.10) 式に帰着する.

F ダークエネルギーの状態方程式とビッグリップ

ロバートソン-ウォーカー計量でのアインシュタイン方程式は, 次の 2 つの独立な式に帰着する.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \tag{F.1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{F.2}$$

ただし，K は空間曲率，ρ と p は宇宙の平均密度および圧力であり，宇宙定数 Λ は 0 であるとした.

F.1 この 2 つの式から，次の関係式を導け.

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -p\frac{d(a^3)}{dt}. \tag{F.3}$$

解 (F.1) 式に a^2 をかけてから時間で微分すれば

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2a\dot{a}\rho). \tag{F.4}$$

この両辺を $2a\dot{a}$ で割ると

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}\left(\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 2\rho\right). \tag{F.5}$$

この左辺に (F.2) 式を代入すると

$$\dot{\rho}\frac{a}{\dot{a}} + 3\rho = -3p \tag{F.6}$$

となる．これは容易に変形できて (F.3) 式と一致する.

F.2 式 (F.3) の物理的な意味を簡単に述べよ.

解 これは，断熱的に膨張する宇宙でのエネルギー保存，あるいは熱力学の第一法則を表している.

F.3 (F.2) 式から，常に $\rho + 3p$ が正であるモデルを考えると，必ずある時刻 t_* において $a = 0$ となること，およびその時刻 t_* を原点 ($t_* = 0$) に選んだときの現在の宇宙の年齢 t_0 は $(a/\dot{a})_{t=t_0} \equiv 1/H_0$ よりも小さいことを図を用いて説明せよ.

解 現在の $\dot{a}$ は正であり (膨張宇宙)，$\ddot{a}$ は題意より常に負 (減速膨張) であるから，$a(t)$ は上に凸の関数となり，過去のあるところで必ずゼロとなる．図形的な考察からわかるように (図 F.1，t_0 での傾きをある値に固定したままで $t_{\max} = t_0 - t_*$ ($a(t)$ がゼロとなる点までの距離) を最大にできるのは，常に $\ddot{a} = 0$ となる場合で，このとき $t_{\max} = 1/H_0$ となる．したがって，一般には $t_0 < 1/H_0$.

F.4 $K = 0$ かつ状態方程式が $p = w\rho$ (ただし，w は -1 より大きい定数とする)

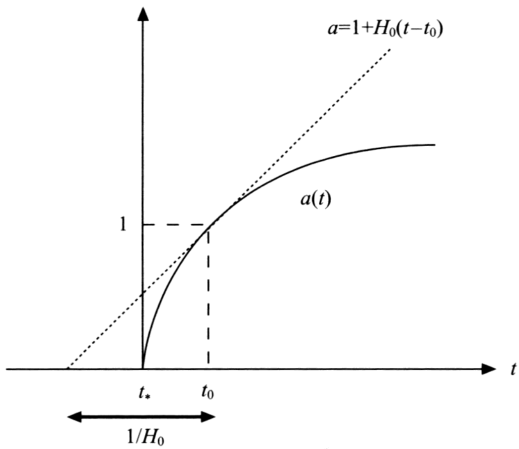


図 **F.1**

の場合，$a(t) \propto t^\alpha$ という解が得られる．この冪指数 $\alpha = \alpha(w)$ を具体的に求めよ．

解 $p = w\rho$ を (F.6) 式に代入すると $\rho \propto a^{-3-3w}$ を得る．これを (F.1) 式に代入して，$K = 0$ とすれば $(\dot{a}/a)^2 \propto a^{-3-3w}$，すなわち

$$\dot{a} \propto a^{-1/2-3w/2} \tag{F.7}$$

となる．$w > -1$ の場合，$a = 0$ の時刻を $t = 0$ に選べば，上式は $a \propto t^{2/(3+3w)}$，つまり，$\alpha(w) = 2/[3(1+w)]$ という解を持つ．ところで，このような状態方程式をもつ場合には，仮に $w < -1/3$ とすれば $\rho + 3p = (1+3w)\rho < 0$ となる．したがって，$\ddot{a} > 0$ (加速膨張) となり，例題 F.3 で示した結果は成り立たない．

F.5 例題 F.4 において $w = -1$ の場合どうなるか別途考察せよ．

解 $w = -1$ の場合には (F.6) 式より ρ は一定となるから，(F.1) 式より

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \Longrightarrow a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho}\, t\right) \tag{F.8}$$

のように，スケール因子が時間に関して指数関数的に増大する解となる．(3.133) 式で示したように，$w = -1$ という状態方程式は宇宙定数に対応する．この解は，宇宙初期のインフレーション，および現在の宇宙の加速膨張を説明するダークエネルギーというまったく異なる時期の宇宙において重要な意味を持つ．このため，現在の宇宙の加速膨張は第二のインフレーションと表現されることがある．

F.6 $K=0$ で，状態方程式が $p=w\rho$ (ただし w は定数) にしたがうダークエネルギーと非相対論的物質が存在する宇宙を考える．このときフリードマン方程式は

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2\ \left(\frac{\Omega_{\rm m}}{a}+\frac{\Omega_{\rm de}}{a^{(1+3w)}}\right), \tag{F.9}$$

となる．ここで H_0 はハッブル定数，$\Omega_{\rm m}$ と $\Omega_{\rm de}\equiv 8\pi G\rho_{\rm de0}/(3H_0^2)$ は非相対論的物質とダークエネルギーの密度パラメータである．もしも $w<-1$ であれば，このモデルのスケール因子はある有限の時刻 $t=t_\infty$ で発散する．これは宇宙が割けてしまうことに対応するので，ビッグリップと呼ぶ．$\Omega_{\rm de}\gg\Omega_{\rm m}$ が成り立つと仮定して，現在からビッグリップまでに残された時間 $\Delta t\equiv t_\infty - t_0$ を計算せよ．

解 $a\gg 1$ の場合，(F.9) 式は

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 \approx H_0^2\frac{\Omega_{\rm de}}{a^{(1+3w)}} \tag{F.10}$$

と近似できるから，

$$\begin{aligned}\Delta t \equiv t_\infty - t_0 &\approx \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{\rm de}}}\int_1^\infty a^{(1+3w)/2}\,da \\ &= \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\rm de}}(1+w)}a^{3(1+w)/2}\bigg|_1^\infty = -\frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\rm de}}(1+w)}.\end{aligned} \tag{F.11}$$

したがって，

$$\Delta t\approx\frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_{\rm de}}|1+w|}\quad (w<-1). \tag{F.12}$$

たとえば，$w=-1.5$, $\Omega_{\rm de}=0.7$ とすれば，$\Delta t\approx 156h^{-1}$ 億年となり，$h=0.7$ を代入すると約 220 億年である．仮に我々がこのような危険な宇宙に住んでいるとしても，その破滅的な瞬間までまだ十分時間があるので心配は不要である．

G　宇宙論的距離の表式

(3.122) 式において動径方向に進む光の経路は

$$ds^2=0\Longrightarrow\frac{dt}{a(t)}=\frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} \tag{G.1}$$

を満たす．したがって，赤方偏移 z の時期に対応する時刻 $t(z)$ に発せられた光が現在 $t=t_0$ までに進む共動座標の長さを $x_{\rm c}(z)$ とすれば，

$$\int_0^{x_{\rm c}}\frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}}=\int_{t(z)}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} \tag{G.2}$$

という関係が成り立つ．この $x_c(z)$ を，現在から赤方偏移 z の時期までの共動距離と呼ぶ．宇宙論では他にも光度距離，角径距離と呼ばれる異なる距離の概念がありそれらの区別は重要である．以下，それらの具体的な表式を計算してみよう．

G.1 (G.2) 式の左辺の積分は，スカラー曲率 K の符号に応じて

$$\int_0^{x_c} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{K}} \sin^{-1}(\sqrt{K}x_c) & (K>0), \\ x_c & (K=0), \\ \dfrac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh^{-1}(\sqrt{|K|}x_c) & (K<0) \end{cases} \tag{G.3}$$

となることを示せ．

解 まず，$K>0$ の場合には被積分関数内の x を

$$x \equiv \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}\chi) \Longleftrightarrow \chi \equiv \frac{1}{\sqrt{K}} \sin^{-1}(\sqrt{K}x) \tag{G.4}$$

と置き換えて χ に変数変換すれば，

$$\int_0^{x_c} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \int_0^{\chi(x_c)} d\chi = \chi(x_c) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin^{-1}(\sqrt{K}x_c) \tag{G.5}$$

が得られる．$K<0$ の場合には

$$x \equiv \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}\chi) \Longleftrightarrow \chi \equiv \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh^{-1}(\sqrt{|K|}x) \tag{G.6}$$

とすることで，同様にして

$$\int_0^{x_c} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \int_0^{\chi(x_c)} d\chi = \chi(x_c) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh^{-1}(\sqrt{|K|}x_c) \tag{G.7}$$

を得る．$K=0$ の場合は自明である．

G.2 3.9.2 節において，一様等方宇宙モデルにおける宇宙膨張を記述するフリードマン方程式：

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{G.8}$$

を導いた ((3.130) 式)．ここで相対論的物質のエネルギー密度が無視できる時期の宇宙を考えることにし，(3.154) 式にしたがって非相対論的物質の密度パラメータ Ω_m と，宇宙定数パラメータ Ω_Λ を定義すれば，

$$K = H_0^2(\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1) \tag{G.9}$$

が成り立つこと，および (G.8) 式が

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_\mathrm{m}(1+z)^3 + (1-\Omega_\mathrm{m}-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \tag{G.10}$$

と変形されることを示せ．

解 (3.154) 式より，現在の非相対論的物質密度と宇宙定数はそれぞれ

$$\rho_{\mathrm{m},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\Omega_\mathrm{m}, \quad \Lambda = 3H_0^2\Omega_\Lambda \tag{G.11}$$

となる．非相対論物質の密度は a^{-3} に比例して変化することを用いれば (G.8) 式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_\mathrm{m}}{a^3} + \Omega_\Lambda\right) - \frac{K}{a^2} \tag{G.12}$$

となる．ただし，スケールファクター a は現在 $(t=t_0)$ の値が 1 となるように規格化されていることを仮定している．この両辺で $t=t_0$ の場合を考えれば

$$\text{左辺} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2_{t=t_0} = H_0^2, \quad \text{右辺} = H_0^2(\Omega_\mathrm{m}+\Omega_\Lambda) - K \tag{G.13}$$

なので，$K = H_0^2(\Omega_\mathrm{m}+\Omega_\Lambda-1)$ という関係が導かれる．

さらに

$$a = \frac{1}{1+z} \Longrightarrow \dot{a} = -\frac{1}{(1+z)^2}\frac{dz}{dt} \tag{G.14}$$

という関係を用いて，(G.12) 式の a を z で書き直せば

$$\frac{1}{(1+z)^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = H_0^2[(1+z)^3\Omega_\mathrm{m} + (1+z)^2(1-\Omega_\mathrm{m}-\Omega_\Lambda) + \Omega_\Lambda]. \tag{G.15}$$

赤方偏移 z は過去ほど大きい値をとるから $dt/dz < 0$ であり，最終的に

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_\mathrm{m}(1+z)^3 + (1-\Omega_\mathrm{m}-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \tag{G.16}$$

が得られる．

G.3 例題 G.1 と例題 G.2 を組み合わせて，$\Omega_\mathrm{m} < 1$ かつ $\Omega_\Lambda = 0$ の場合に

$$x_\mathrm{c}(z) = \frac{2}{H_0\Omega_\mathrm{m}^2(1+z)}\left[2-\Omega_\mathrm{m}+\Omega_\mathrm{m}z-(2-\Omega_\mathrm{m})\sqrt{1+\Omega_\mathrm{m}z}\right] \tag{G.17}$$

を導け (Mattig の公式と呼ばれている)．ただし，$b>0$ の場合，

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| \tag{G.18}$$

を用いてよい．

解 $\Omega_{\rm m}<1$ かつ $\Omega_\Lambda=0$ のときには $K=H_0^2(\Omega_{\rm m}-1)<0$ なので，例題 G.1 と例題 G.2 より

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H_0\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\sinh^{-1}\left(H_0\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}x_{\rm c}\right)\\&=\frac{1}{H_0}\int_0^z\frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}}.\end{aligned}\tag{G.19}$$

(G.18) 式を使って (G.19) 式の右辺を計算すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H_0\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}-\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}{\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}+\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\right|\right]_0^z\\&=\frac{1}{H_0\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\ln\underbrace{\left|\frac{\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}-\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}{\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}+\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\frac{1+\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}{1-\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\right|}_{\equiv f}.\end{aligned}\tag{G.20}$$

この f を変形して

$$\begin{aligned}f&=\frac{(\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}-\sqrt{1-\Omega_{\rm m}})^2}{\Omega_{\rm m}(1+z)}\frac{(1+\sqrt{1-\Omega_{\rm m}})^2}{\Omega_{\rm m}}\\&\equiv\frac{(A-2\sqrt{B})(C+2\sqrt{D})}{\Omega_{\rm m}^2(1+z)}\\&\Downarrow\\\frac{1}{f}&=\frac{(\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)+1-\Omega_{\rm m}}+\sqrt{1-\Omega_{\rm m}})^2}{\Omega_{\rm m}(1+z)}\frac{(1-\sqrt{1-\Omega_{\rm m}})^2}{\Omega_{\rm m}}\\&\equiv\frac{(A+2\sqrt{B})(C-2\sqrt{D})}{\Omega_{\rm m}^2(1+z)}\end{aligned}\tag{G.21}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}x_{\rm c}&=\frac{1}{H_0\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\sinh\ln f=\frac{1}{2H_0\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\left(f-\frac{1}{f}\right)\\&=\frac{1}{2H_0\Omega_{\rm m}^2(1+z)\sqrt{1-\Omega_{\rm m}}}\left(4A\sqrt{D}-4C\sqrt{B}\right)\\&=\frac{2}{H_0\Omega_{\rm m}^2(1+z)}\left[2-\Omega_{\rm m}+\Omega_{\rm m}z-(2-\Omega_{\rm m})\sqrt{1+\Omega_{\rm m}z}\right]\end{aligned}\tag{G.22}$$

が得られる．

G.4 5.8 節で議論したように，光度 $\mathscr{L}_{\rm s}$ のソース天体からの等方的な輻射は，観測

者の静止系でエネルギー流束：

$$\mathscr{F}_{\rm obs} = \frac{\mathscr{L}_{\rm s}}{4\pi d_{\rm L}^2} \tag{G.23}$$

として到達する．この $d_{\rm L}$ はソース天体と観測者間の距離であるが，特に光度に基づいて定義されているので，光度距離 (luminosity distance) と呼ばれている．宇宙論的効果が無視できる ($z \ll 1$)，すなわち $\mathscr{L}_{\rm s}$ が実際に観測される $\mathscr{L}_{\rm obs}$ と等しい場合に $d_{\rm L}$ が共動距離 $x_{\rm c}$ に一致するものとして，

$$d_{\rm L} = (1+z)x_{\rm c} \tag{G.24}$$

という関係式を導け．

解 光度は単位時間あたりのエネルギー変化率であるから，ソース天体の静止系では

$$\mathscr{L}_{\rm s} = \frac{dE_{\rm s}}{dt_{\rm s}} \tag{G.25}$$

と書ける．一方，これを観測者の静止系での光度 $\mathscr{L}_{\rm obs}$ に変換すれば，エネルギーは赤方偏移して $1/(1+z)$ 倍だけ小さくなり，時間は $(1+z)$ だけ長くなるので，

$$\mathscr{L}_{\rm obs} \equiv \frac{dE_{\rm obs}}{dt_{\rm obs}} = \frac{dE_{\rm s}/(1+z)}{(1+z)dt_{\rm s}} = \frac{1}{(1+z)^2}\frac{dE_{\rm s}}{dt_{\rm s}} = \frac{1}{(1+z)^2}\mathscr{L}_{\rm s}. \tag{G.26}$$

したがって，

$$\mathscr{F}_{\rm obs} = \frac{\mathscr{L}_{\rm s}}{4\pi d_{\rm L}^2} = (1+z)^2\frac{\mathscr{L}_{\rm obs}}{4\pi d_{\rm L}^2} \equiv \frac{\mathscr{L}_{\rm obs}}{4\pi x_{\rm c}^2} \tag{G.27}$$

となり

$$d_{\rm L} = (1+z)x_{\rm c} \tag{G.28}$$

が導かれた．

G.5 長さ D の物体を見込む角度が θ であると観測される場合，その物体までの距離 $d_{\rm A}$ を

$$D = d_{\rm A}\theta \tag{G.29}$$

によって定義することもできる．この距離を角径距離 (angular diamater) と呼ぶ．赤方偏移 z までの角径距離と共動距離の間の関係式：

$$d_{\rm A} = \frac{x_{\rm c}}{1+z} \tag{G.30}$$

を示せ．

解 共動座標系で考えてみると，共動距離 $x_{\rm c}$ にある共動長さ $D/(1+z)$ の物体

を見込む角度が θ である，ということになるから

$$\frac{D}{1+z} = x_{\rm c}\theta \Longrightarrow D = (1+z)x_{\rm c}\theta. \tag{G.31}$$

これを (G.29) 式と比べれば (G.30) 式が得られる．

G.6 例題 G.1 と例題 G.2 の結果から，相対論的物質が無視できる場合には，共動距離 $x_{\rm c}$ は

$$\int_0^{x_{\rm c}} \frac{dx}{\sqrt{1-Kx^2}} = \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)^3 + (1-\Omega_{\rm m}-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \tag{G.32}$$

を満たす．$z \ll 1$ の場合，この右辺を z の 2 次まで展開して，共動距離 $x_{\rm c}$, 光度距離 $d_{\rm L} = (1+z)x_{\rm c}$, および角径距離 $d_{\rm A} = x_{\rm c}/(1+z)$ に対する近似式を求めよ．

解 $z \ll 1$ の場合 $\sqrt{|K|}x_{\rm c} \ll 1$ であるから，(G.32) 式の左辺の積分は $x_{\rm c}$ と近似してよい．右辺を z の 2 次まで展開することで

$$\begin{aligned} x_{\rm c} &\approx \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_{\rm m}(1+z)^3 + (1-\Omega_{\rm m}-\Omega_\Lambda)(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}} \\ &\approx \frac{1}{H_0}\int_0^z \left(1 - \frac{\Omega_{\rm m} - 2\Omega_\Lambda + 2}{2}z\right)dz \\ &= \frac{z}{H_0}\left(1 + \frac{2-\Omega_{\rm m}+2\Omega_\Lambda}{4}z\right) \end{aligned} \tag{G.33}$$

を得る．この結果より，光度距離は

$$d_{\rm L} \approx \frac{z}{H_0}\left(1 + \frac{2-\Omega_{\rm m}+2\Omega_\Lambda}{4}z\right), \tag{G.34}$$

角径距離は

$$d_{\rm A} \approx \frac{z}{H_0}\left(1 + \frac{6-\Omega_{\rm m}+2\Omega_\Lambda}{4}z\right) \tag{G.35}$$

と近似できることがわかる．

H 連星から放出される重力波

重力波源の質量 4 重極モーメント $\mathscr{I}_{jk}^{\rm TT}$ の時間変化と，それにともなって放出される重力波を距離 r だけ離れた点で受けたときの振幅の間には次の関係がある．

$$h_{jk}^{\rm TT}(t) = \frac{2G}{r}\frac{\partial^2 \mathscr{I}_{jk}^{\rm TT}(t-r)}{\partial t^2} \tag{H.1}$$

地球から $r = 10^{16}\mathrm{km}$ の距離にあり，質量 $m_1 = m_2 = M_\odot$ $(= 2 \times 10^{33}\mathrm{g})$ をもつ 2 つの質点が，視線方向に垂直な面上を 10 時間の公転周期で円軌道のケプラー運動をしているものとする．この場合に放出される重力波を評価してみよう．

H.1 放出される重力波の周期はいくらか.

解 公転の角振動数を ω とすれば，連星系の 4 重極は座標の 2 乗に比例するため，2ω の周波数成分を持つ．したがって重力波の周期は公転周期の半分，すなわち 5 時間となる．この定性的な説明で納得できなければ以下のように具体的に計算してみればよい.

ケプラーの法則より，この円軌道の半径 a と公転運動の角振動数 ω $(= 2\pi/10$ 時間$)$ の間には

$$G(m_1 + m_2) = \omega^2 a^3 \tag{H.2}$$

の関係がある．したがって，原点を重心に取り適当に時間の原点 (あるいは，公転の位相) を選べば，これらの連星の位置は

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a\cos(\omega t), \quad y_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a\sin(\omega t), \tag{H.3}$$

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a\cos(\omega t), \quad y_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a\sin(\omega t) \tag{H.4}$$

と書ける．したがって，4 重極の 0 でない成分は,

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \cos^2(\omega t) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} a^2 [1 + \cos(2\omega t)], \end{aligned} \tag{H.5}$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} a^2 [1 - \cos(2\omega t)], \end{aligned} \tag{H.6}$$

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} a^2 \sin(2\omega t) \end{aligned} \tag{H.7}$$

である.

重力波の周期という観点では，周波数が 2ω, 周期は π/ω となることの説明は上記の計算で尽きている．さらにこれらを用いて，$\mathscr{I}_{jk}^{\mathrm{TT}}$ を計算し，地上の座標系を設定すれば，角度依存性まで含めて重力波の解が得られる.

H.2 地上で受け取るこの重力波の振幅 h の大きさを定性的に推定せよ.

解 (H.1) 式を近似的に評価すると

$$h \approx \frac{2G}{r}\frac{\partial^2 \mathscr{I}(t)}{\partial t^2} \approx \frac{2G}{r}(2\omega)^2 \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} a^2 \sim \frac{4G^2 M_\odot^2}{ar}. \tag{H.8}$$

ここで, 軌道半径 a は,

$$\begin{aligned} a &= [G(m_1+m_2)/\omega^2]^{1/3} \\ &\approx [3\mathrm{km} \times (3 \times 10^5 \mathrm{km/s} \times 10 \times 3600\mathrm{s}/2\pi)^2]^{1/3} \\ &\sim 2 \times 10^6 \mathrm{km} \end{aligned} \tag{H.9}$$

であるから, 上の結果に代入して

$$h \sim \frac{4 \times (3\mathrm{km})^2}{10^{16}\mathrm{km} \times 2 \times 10^6 \mathrm{km}} \sim 2 \times 10^{-21}. \tag{H.10}$$

I フェルマーの原理

幾何光学においては媒質中の光線の経路はフェルマーの原理から決定できる. 重力レンズの場合も同様である. そのためには, 一般相対論の文脈におけるフェルマーの原理を定式化しておく必要がある. ここではそのなかでもっとも簡単な場合である

静的時空におけるフェルマーの原理 時空:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \tag{I.1}$$

が, 静的, すなわち

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,0} &= 0 \quad (\text{時間に依存しない}), \\ &\text{かつ} \\ g_{0i} &= 0 \quad (\text{時間反転に対して不変}) \end{aligned} \tag{I.2}$$

を満たすとき, 光線は 2 点 A, B を結ぶ経路の所要時間が最小となるように進む.

$$\delta(\Delta t_{\mathrm{AB}}) \equiv \delta \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} dt = 0. \tag{I.3}$$

を証明してみよう.

まず, 一般に光の測地線は

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \tag{I.4}$$

で与えられる．ここで，λ はこの測地線に沿った道のりの長さに対応するパラメータで，アフィンパラメータと呼ばれる．

I.1 静的時空の条件である (I.2) 式を用いて (I.4) 式の $\mu = 0$ 成分を変形することで

$$\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma^0{}_{0i}\frac{dx^i}{dt} = -2g^{00}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt} = -2\frac{\Gamma_{00i}}{g_{00}}\frac{dx^i}{dt} \tag{I.5}$$

を導け．ただしここで $t \equiv x^0$ とした．

解 (I.4) 式の $\mu = 0$ 成分は

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma^0{}_{00}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + 2\Gamma^0{}_{0i}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda} + \Gamma^0{}_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = 0. \tag{I.6}$$

ここで (I.2) 式より

$$\Gamma^0{}_{00} = g^{0\alpha}\Gamma_{\alpha 00} = g^{00}\Gamma_{000} = g^{00} \times \frac{1}{2}g_{00,0} = 0, \tag{I.7}$$

$$\Gamma^0{}_{ij} = g^{0\alpha}\Gamma_{\alpha ij} = g^{00}\Gamma_{0ij} = g^{00} \times \frac{1}{2}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) = 0, \tag{I.8}$$

$$1 = g^{0\alpha}g_{\alpha 0} = g^{00}g_{00} + g^{0i}g_{i0} = g^{00}g_{00} \tag{I.9}$$

なので，

$$\frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma^0{}_{0i}\frac{dx^i}{dt} = -2g^{00}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt} = -2\frac{\Gamma_{00i}}{g_{00}}\frac{dx^i}{dt}. \tag{I.10}$$

I.2 (I.5) 式を (I.4) 式の $\mu = k$ 成分に代入して変形すると

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} - \frac{2}{g_{00}}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \left(-\Gamma^k{}_{00}\frac{g_{ij}}{g_{00}} + \Gamma^k{}_{ij}\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{I.11}$$

が得られることを示せ．

解 $\mu = k$ 成分は

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k{}_{00}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + 2\underbrace{\Gamma^k{}_{0i}}_{=g^{kl}\Gamma_{l0j}=0}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda} + \Gamma^k{}_{ij}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = 0. \tag{I.12}$$

(I.12) 式の第 1 項は (I.5) 式を用いると

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^k}{dt}\frac{dt}{d\lambda}\right) &= \frac{d^2x^k}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{dx^k}{dt}\frac{d^2t}{d\lambda^2} \\ &= \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2\left(\frac{d^2x^k}{dt^2} - 2\frac{\Gamma_{00i}}{g_{00}}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)\end{aligned} \tag{I.13}$$

と変形できる．また $g_{0i} = 0$ なので，$ds^2 = 0$ である光の測地線に沿って

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ij}\,dx^i dx^j = 0 \Longrightarrow dt^2 = -\frac{g_{ij}\,dx^i dx^j}{g_{00}} \tag{I.14}$$

が成り立つ．したがって (I.12) 式の第 2 項は

$$\Gamma^k{}_{00}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = -\Gamma^k{}_{00}\frac{g_{ij}}{g_{00}}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda} = -\Gamma^k{}_{00}\frac{g_{ij}}{g_{00}}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2. \tag{I.15}$$

最後に (I.13) 式と (I.15) 式を用いて (I.12) 式の λ に関する微分を t で書き直せば

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} - \frac{2}{g_{00}}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} + \left(-\Gamma^k{}_{00}\frac{g_{ij}}{g_{00}} + \Gamma^k{}_{ij}\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{I.16}$$

I.3 (I.11) 式を g_{lk} と縮約し，

$$\gamma_{ij} \equiv -\frac{g_{ij}}{g_{00}} \Longrightarrow dt^2 = \gamma_{ij}\,dx^i dx^j \tag{I.17}$$

を定義すると

$$\gamma_{lk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}(\gamma_{li,j} + \gamma_{lj,i} - \gamma_{ij,l})\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{I.18}$$

となることを示せ．

解 (I.11) 式を各項ごとに g_{lk} と縮約すれば

$$-\frac{2g_{lk}}{g_{00}}\Gamma_{00i}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = -\frac{2g_{lj}}{g_{00}}\frac{g_{00,i}}{2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = -\frac{g_{lj}g_{00,i}}{g_{00}}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$$= -\frac{g_{lj}g_{00,i} + g_{li}g_{00,j}}{2g_{00}}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt},$$

$$-g_{lk}\Gamma^k{}_{00} = -\Gamma_{l00} = \frac{g_{00.l}}{2} \tag{I.19}$$

となるので，それらをまとめて

$$g_{lk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \left(\Gamma_{lij} - \frac{g_{lj}g_{00,i} + g_{li}g_{00,j}}{2g_{00}} + \frac{g_{ij}g_{00,l}}{2g_{00}}\right)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{I.20}$$

を得る．また (I.17) 式から

$$\gamma_{li,j} = -\frac{g_{li,j}}{g_{00}} + \frac{g_{li}}{g_{00}}\frac{g_{00,j}}{g_{00}}, \tag{I.21}$$

$$\gamma_{lj,i} = -\frac{g_{lj,i}}{g_{00}} + \frac{g_{lj}}{g_{00}}\frac{g_{00,i}}{g_{00}}, \tag{I.22}$$

$$\gamma_{ij,l} = -\frac{g_{ij,l}}{g_{00}} + \frac{g_{ij}}{g_{00}}\frac{g_{00,l}}{g_{00}} \tag{I.23}$$

であるから，

$$\frac{g_{00}}{2}(\gamma_{li,j}+\gamma_{lj,i}-\gamma_{ij,l})$$
$$=-\frac{1}{2}\underbrace{(g_{li,j}+g_{lj,i}-g_{ij,l})}_{=\Gamma_{lij}}-\frac{1}{2g_{00}}(g_{ij}g_{00,l}-g_{lj}g_{00,i}-g_{li}g_{00,j}). \tag{I.24}$$

これらから (I.20) 式を γ_{ij} で書き換えれば

$$\gamma_{lk}\frac{d^2x^k}{dt^2}+\frac{1}{2}(\gamma_{li,j}+\gamma_{lj,i}-\gamma_{ij,l})\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0 \tag{I.25}$$

となる．

I.4 以上の結果をまとめて上記のフェルマーの原理が成り立つことを示せ．

解 以上から，静的時空に対する測地線の方程式は，(I.17) 式の計量に対する測地線の方程式：

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}+\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0, \tag{I.26}$$

$$\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij}\equiv\gamma^{kl}\widetilde{\Gamma}_{lij}\equiv\gamma^{kl}\times\frac{1}{2}(\gamma_{li,j}+\gamma_{lj,i}-\gamma_{ij,l}) \tag{I.27}$$

に帰着することが示された．2.4 節でみたように，この測地線の方程式は変分原理：

$$\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}dt=\delta\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\sqrt{\gamma_{ij}\,dx^idx^j}=0 \tag{I.28}$$

によって導かれる．これが (I.3) 式で表されるフェルマーの原理に他ならない．

J　フェルマーの原理を用いたレンズ方程式の導出

重力が弱い場合には，ニュートンの重力ポテンシャル ϕ を用いて，計量が近似的に

$$ds^2=-(1+2\phi)\,dt^2+(1-2\phi)\delta_{ij}\,dx^idx^j$$
$$\equiv-(1+2\phi)\,dt^2+(1-2\phi)\,d\ell^2 \tag{J.1}$$

で与えられる (2.4 節参照)．光の経路は $ds^2=0$ を満たすので，図 J.2 において S $\longrightarrow$ I $\longrightarrow$ O に沿って進むときの所要時間は

$$\Delta t_{\mathrm{SO}}=\int_{\mathrm{SIO}}dt=\int_{\mathrm{SIO}}\sqrt{\frac{1-2\phi}{1+2\phi}}\,d\ell\approx\int_{\mathrm{SIO}}(1-2\phi)\,d\ell$$
$$\approx\overline{\mathrm{SI}}+\overline{\mathrm{IO}}-2\int_{\mathrm{S'}}^{\mathrm{O}}\phi\,d\ell \tag{J.2}$$

で与えられる．最後の積分の項は $|\phi| \ll 1$ であることから，経路を $\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{O}$ ではなく近似的に直線 $\mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{O}$ で置き換えた．

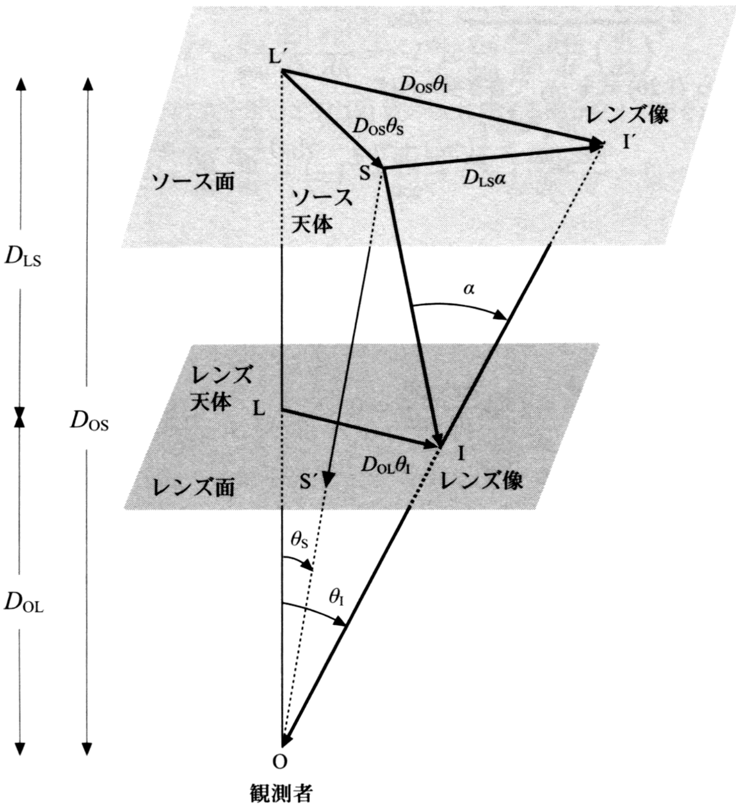


図 **J.2** 薄いレンズ近似における重力レンズの経路 (図は図 5.1 と同じ)．

J.1 この式が

$$\Delta t_{\mathrm{SO}} \approx \frac{D_{\mathrm{OS}} D_{\mathrm{OL}}}{2D_{\mathrm{LS}}} |\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}|^2 - 2\int_{\mathrm{S}'}^{\mathrm{O}} \phi\, d\ell + \overline{\mathrm{OS}} \tag{J.3}$$

に帰着することを示せ．

解 ここで $\overrightarrow{\mathrm{LL}'}$ 向きの単位ベクトル $\hat{z}$, 2 次元角度ベクトル $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}$ を用いると

$$\overline{\mathrm{SI}} = |-D_{\mathrm{OL}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{LS}}\hat{z} + D_{\mathrm{OS}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}| = \sqrt{D_{\mathrm{LS}}^2 + |D_{\mathrm{OL}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - D_{\mathrm{OS}}\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{S}}|^2}$$

$$\approx D_{\rm LS}\left(1+\frac{|D_{\rm OL}\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-D_{\rm OS}\boldsymbol{\theta}_{\rm S}|^2}{2D_{\rm LS}^2}\right), \tag{J.4}$$

$$\overline{\rm IO}=|-D_{\rm OL}\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-D_{\rm OL}\hat{z}|=D_{\rm OL}\sqrt{1+\theta_{\rm I}^2}\approx D_{\rm OL}\left(1+\frac{\theta_{\rm I}^2}{2}\right), \tag{J.5}$$

$$\overline{\rm OS}=|D_{\rm OS}\boldsymbol{\theta}_{\rm S}+D_{\rm OS}\hat{z}|=D_{\rm OS}\sqrt{1+\theta_{\rm S}^2}\approx D_{\rm OS}\left(1+\frac{\theta_{\rm S}^2}{2}\right) \tag{J.6}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned}\overline{\rm SI}+\overline{\rm IO}-\overline{\rm OS}&\approx\frac{|D_{\rm OL}\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-D_{\rm OS}\boldsymbol{\theta}_{\rm S}|^2}{2D_{\rm LS}}+\frac{D_{\rm OL}}{2}\theta_{\rm I}^2-\frac{D_{\rm OS}}{2}\theta_{\rm S}^2\\&=\frac{D_{\rm OL}^2+D_{\rm LS}D_{\rm OL}}{2D_{\rm LS}}\theta_{\rm I}^2+\frac{D_{\rm OS}^2-D_{\rm LS}D_{\rm OS}}{2D_{\rm LS}}\theta_{\rm S}^2-\frac{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}{D_{\rm LS}}\boldsymbol{\theta}_{\rm I}\cdot\boldsymbol{\theta}_{\rm S}\\&=\frac{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}{2D_{\rm LS}}|\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-\boldsymbol{\theta}_{\rm S}|^2\end{aligned} \tag{J.7}$$

となるから (J.2) 式は

$$\Delta t_{\rm SO}\approx\frac{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}{2D_{\rm LS}}|\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-\boldsymbol{\theta}_{\rm S}|^2-2\int_{\rm S'}^{\rm O}\phi\,d\ell+\overline{\rm OS} \tag{J.8}$$

に帰着する．ここで，第 1 項は光線が曲がらず直線である場合 (第 3 項) との時間差で経路の幾何学に依存した項，第 2 項は重力ポテンシャルによる時間の遅れ[3)]を表す．第 3 項はレンズ像の位置 $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ に依存しない定数なので，経路 (すなわち $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$) に関して変分する際には無視してよい．

J.2 レンズポテンシャル：

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I})\equiv2\frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}\int_{\rm S'}^{\rm O}\phi\,d\ell \tag{J.9}$$

およびフェルマーポテンシャル：

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I},\boldsymbol{\theta}_{\rm S})\equiv\frac{D_{\rm OS}D_{\rm OL}}{D_{\rm LS}}\left(\frac{|\boldsymbol{\theta}_{\rm I}-\boldsymbol{\theta}_{\rm S}|^2}{2}-\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I})\right) \tag{J.10}$$

を定義すると，(J.3) 式は $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ に依存しない第 3 項を無視すれば

$$\Delta t_{\rm SO}=\hat{\phi}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I},\boldsymbol{\theta}_{\rm S}) \tag{J.11}$$

と書き直せる．この式を $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ に関して変分することでレンズ方程式を導け．ただし，5.4 節で示したように，レンズポテンシャルが

---

3) $\phi<0$ であるから，$\Delta t_{\rm SO}$ に与える寄与は正となる．

$$\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = \frac{4G}{c^2}\frac{D_{\rm OL}D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}}\int \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \ln|\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}|\, d\boldsymbol{\theta} \tag{J.12}$$

で与えられることを用いてよい．

解 $\Delta t_{\rm SO}$ を $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ に関して変分して停留値をとる条件より

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}\hat{\phi} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}_{\rm S} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}\Psi. \tag{J.13}$$

この式の右辺は

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}\Psi(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = \frac{1}{\pi\Sigma_{\rm c}}\int \Sigma(\boldsymbol{\theta})\frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}|^2}\, d\boldsymbol{\theta} \underbrace{=}_{(5.28)\text{式}} \frac{D_{\rm LS}}{D_{\rm OS}}\boldsymbol{\alpha} \tag{J.14}$$

となり，レンズ方程式を与える．

K 円対称重力レンズ天体に対する曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$

薄いレンズ近似のもとでは，図 J.2 のレンズ天体 L に対して $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ の角度をなす光線の曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ は，

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = 4GD_{\rm OL}\int \frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}|^2}\Sigma(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta} \tag{K.1}$$

で与えられる．ここで，$\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ は，物質の質量密度のレンズ平面上への射影で定義される 2 次元面密度

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(D_{\rm OL}\theta_{\rm x}, D_{\rm OL}\theta_{\rm y}, z)\, dz \tag{K.2}$$

である．以下，円対称レンズ

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \Sigma(|\boldsymbol{\theta}|) \tag{K.3}$$

の場合に，(K.1) 式を具体的に計算してみよう．ただし，以下では簡単のために光速 c が 1 となるような単位系を用いることにする．

K.1 円対称レンズの場合，$\boldsymbol{\theta} = (\theta\cos\varphi, \theta\sin\varphi)$ とおいて，

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = 4GD_{\rm OL}\int \theta\Sigma(\theta)\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\rm I} - \boldsymbol{\theta}|^2} \tag{K.4}$$

と変形される．2 次元ベクトルである $\boldsymbol{\theta}_{\rm I}$ と $\boldsymbol{\theta}$ を複素数表示したものをそれぞれ $\theta_{\rm I}, \theta$ とすれば (K.4) の φ に関する積分が

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{\theta_{\rm I} - \theta}{|\theta_{\rm I} - \theta|^2} = \frac{2\pi\theta_{\rm I}}{|\theta_{\rm I}|^2}\, \Theta(|\theta_{\rm I}| - |\theta|) \tag{K.5}$$

に帰着することを示せ．ここで $\Theta(x)$ はヘビサイド関数：

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{K.6}$$

である．

解 複素数表示では

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\theta_{\mathrm{I}} - \theta}{|\theta_{\mathrm{I}} - \theta|^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{\theta_{\mathrm{I}}^* - \theta^*} \tag{K.7}$$

となる．ここで $\xi = e^{i\varphi}$ とおくと

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{i\xi} \frac{1}{\theta_{\mathrm{I}}^* - |\theta|/\xi} = \frac{1}{i\theta_{\mathrm{I}}^*} \oint_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi - |\theta|/\theta_{\mathrm{I}}^*} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{i\theta_{\mathrm{I}}^*} \times 2\pi i & \left(\dfrac{|\theta|}{|\theta_{\mathrm{I}}^*|} < 1 \right) \\ 0 & \left(\dfrac{|\theta|}{|\theta_{\mathrm{I}}^*|} > 1 \right) \end{cases} = \frac{2\pi\theta_{\mathrm{I}}}{|\theta_{\mathrm{I}}|^2} \, \Theta(|\theta_{\mathrm{I}}| - |\theta|). \end{aligned} \tag{K.8}$$

K.2 以下では複素数表示は行わず，θ_{I} は 2 次元ベクトルの絶対値 $|\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}|$ を表すものとする．例題 K.1 の結果より

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) = 4GD_{\mathrm{OL}} \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2} \widetilde{M}(< \theta_{\mathrm{I}}) \tag{K.9}$$

と書けることを示せ．ただし，

$$\widetilde{M}(< \theta_{\mathrm{I}}) \equiv \int_0^{\theta_{\mathrm{I}}} 2\pi\theta \Sigma(\theta) \, d\theta \tag{K.10}$$

とする．このとき $\widetilde{M}(< \theta_{\mathrm{I}})$ の次元と物理的意味を述べよ．

解 例題 K.1 より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}) &= 4GD_{\mathrm{OL}} \int \theta \Sigma(\theta) \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\theta}|^2} \\ &= 4GD_{\mathrm{OL}} \int \theta \Sigma(\theta) \, d\theta \, \frac{2\pi \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2} \Theta(\theta_{\mathrm{I}} - \theta) \\ &= 4GD_{\mathrm{OL}} \frac{\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}}{\theta_{\mathrm{I}}^2} \underbrace{\int_0^{\theta_{\mathrm{I}}} 2\pi\theta \Sigma(\theta) \, d\theta}_{\widetilde{M}(<\theta_{\mathrm{I}})}. \end{aligned} \tag{K.11}$$

この表式からわかるように，$\widetilde{M}(< \theta_{\mathrm{I}})$ はレンズ平面に射影した面密度の θ_{I} 内の全質量 (射影質量) に対応し，その次元は [質量]/[長さ]^2 である．

K.3 図 J.2 の L の位置に質量 M の質点がある場合，(K.9) 式より，

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = \frac{4GM}{D_{\rm OL}} \frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}{\theta_{\rm I}^2} \tag{K.12}$$

となることを示せ．またこの結果は，質点のまわりの光線の曲がり角が

$$\alpha = 2\frac{r_{\rm s}(M)}{b} \tag{K.13}$$

で与えられる (b は最近接点と質点との距離，$r_{\rm s}$ はこの質点のシュワルツシルド半径) というよく知られた事実と等価であることを示せ．

解 図 J.2 において L の 3 次元座標を $(0, 0, z_{\rm L})$ とすれば，そこに質量 M の質点がある場合の 3 次元質量密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}) = M\delta_{\rm D}^{(1)}(z - z_{\rm L})\delta_{\rm D}^{(1)}(x)\delta_{\rm D}^{(1)}(y) \tag{K.14}$$

で与えられる．(K.2) 式より，対応する 2 次元面密度は

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\, \rho(\boldsymbol{r}) = M\delta_{\rm D}^{(1)}(x)\delta_{\rm D}^{(1)}(y) = \frac{M}{{D_{\rm OL}}^2}\delta_{\rm D}^{(2)}(\boldsymbol{\theta}) \tag{K.15}$$

となる．ここで $\delta_{\rm D}^{(1)}$ と $\delta_{\rm D}^{(2)}$ はそれぞれ 1 次元と 2 次元のディラック関数である．また射影質量は

$$\widetilde{M}(< \theta_{\rm I}) = \int \Sigma(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta} = \frac{M}{D_{\rm OL}^2} \tag{K.16}$$

となる．これを (K.9) 式に代入すると

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_{\rm I}) = \frac{4GM}{D_{\rm OL}} \frac{\boldsymbol{\theta}_{\rm I}}{\theta_{\rm I}^2}. \tag{K.17}$$

この表式に

$$r_{\rm s}(M) = 2GM, \quad b = D_{\rm OL}\theta_{\rm I} \tag{K.18}$$

を代入すれば

$$\alpha = 2\frac{r_{\rm s}(M)}{b} \tag{K.19}$$

に帰着することがわかる．

K.4 渦巻銀河の中心から距離 r の点での回転速度

$$V_{\rm c} \equiv \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \tag{K.20}$$

は，r が大きいところでは，r によらず一定であることが知られている．(K.20) 式がすべての r について厳密に成り立つ場合に，この銀河の質量密度分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ が球対称であ

るならば

$$\rho(r) = \frac{V_\mathrm{c}^2}{4\pi G r^2} \tag{K.21}$$

となることを示せ．

解 (K.20) 式より

$$\frac{V_\mathrm{c}^2 r}{G} = M(r) = \int_0^r 4\pi\rho(r) r^2\, dr. \tag{K.22}$$

V_c が定数の場合にはこの両辺を r で微分して

$$\frac{V_\mathrm{c}^2}{G} = 4\pi r^2 \rho(r) \Longrightarrow \rho(r) = \frac{V_\mathrm{c}^2}{4\pi G r^2} \tag{K.23}$$

を得る．

K.5 例題 K.4 の結果は，銀河を球対称な等温理想気体であると仮定し，圧力が

$$p(r) = \rho(r)\sigma_v^2 \tag{K.24}$$

で与えられることを用いて，静水圧平衡の式：

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho, \quad M = 4\pi\int_0^r \rho r^2 dr \tag{K.25}$$

を解くことからも導ける．ここで，σ_v は r によらない 1 次元の速度分散である (この "理想気体" は星であると考えてもよいし，ダークマター粒子であるとしてもよい)．速度分布関数が等方的であるとしたとき，

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} V_\mathrm{c} \tag{K.26}$$

であることを示し，(K.21) 式を代入することでそれが (K.24) 式と (K.25) 式の解になっていることを確かめよ．

解 まず V_c は平面上の運動に対応するから 2 自由度，一方 σ_v は 1 自由度の速度成分にそれぞれ対応するから

$$V_\mathrm{c}^2 = 2\sigma_v^2, \tag{K.27}$$

すなわち (K.26) 式が成り立つ．したがって，(K.21) 式は

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2} \tag{K.28}$$

と書き換えられる．

一方，(K.24) 式と (K.25) 式より

$$\sigma_v^2 \frac{d\rho}{dr} = -\frac{G\rho}{r^2}\int_0^r 4\pi r^2 \rho\, dr \Longrightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\ln\rho}{dr}\right) = -\frac{4\pi G}{\sigma_v^2}\rho r^2. \tag{K.29}$$

この左辺に (K.28) 式を代入すると

$$\frac{d}{dr}\left(-2r^2\frac{1}{r}\right) = -2. \tag{K.30}$$

右辺に (K.21) 式を代入するとやはり -2 であるから，確かに (K.28) 式，すなわち (K.21) 式は (K.24) 式と (K.25) 式の解 (の 1 つ) である．

K.6 (K.21) 式の分布を一般化して中心が有限のコア半径 r_c を持つ場合：

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G}\frac{1}{r^2 + r_c^2} \tag{K.31}$$

を考える．この密度分布に対する曲がり角 $\boldsymbol{\alpha}$ は (K.9) 式より

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\pi\sigma_v^2 \frac{\boldsymbol{\theta}_I}{\theta_I^2}\left(\sqrt{\theta_I^2 + \theta_c^2} - \theta_c\right) \tag{K.32}$$

となることを示せ．ただしここで，$\theta_c \equiv r_c/D_{OL}$ とした．

解 (K.2) 式より，対応する 2 次元面密度は

$$\begin{aligned} \Sigma(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r)\, dz = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2 + r_c^2} \\ &= \frac{\sigma_v^2}{2G}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + r_c^2}} = \frac{\sigma_v^2}{2GD_{OL}}\frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \theta_c^2}} \end{aligned} \tag{K.33}$$

と計算できる．さらに，(K.10) 式より射影質量は

$$M(<\theta_I) = \int_0^{\theta_I} 2\pi\theta\Sigma(\theta)\, d\theta = \frac{\pi\sigma_v^2}{GD_{OL}}\left(\sqrt{\theta_I^2 + \theta_c^2} - \theta_c\right). \tag{K.34}$$

である．これを (K.9) 式に代入して

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\pi\sigma_v^2 \frac{\boldsymbol{\theta}_I}{\theta_I^2}\left(\sqrt{\theta_I^2 + \theta_c^2} - \theta_c\right) \tag{K.35}$$

を得る．

特に，(K.21) 式に対応する $r_c = 0$ の場合は特異等温球 (SIS : singular isothermal sphere) と呼ばれ，$\boldsymbol{\alpha}$ が θ_I によらない値：

$$\alpha = 4\pi\sigma_v^2 \tag{K.36}$$

で与えられるという著しい性質をもつことを注意しておく．

索引

▶ ま行

▶ や行

▶ ら行

須藤 靖 (すとう・やすし)

略歴

1958年 高知県に生まれる.

1981年 東京大学理学部物理学科卒業.

1986年 東京大学大学院理学系研究科博士課程修了.
カリフォルニア大学バークレー校, ミラー基礎科学研究所研究員,
茨城大学理学部物理教室, 広島大学理論物理学研究所,
京都大学基礎物理学研究所を経て,

現在 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻教授. 理学博士.

ホームページ

`http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~suto`

専門は宇宙論・太陽系外惑星

主な著書に『一般相対論入門』(日本評論社, 2005),
『ものの大きさ — 自然の階層・宇宙の階層』(東京大学出版会, 2006)
『解析力学・量子論』(東京大学出版会, 2008),
『宇宙生物学入門 — 惑星・生命・文明の起源』(シュプリンガージャパン, 2008, 共訳),
『人生一般ニ相対論』(東京大学出版会, 2010).

もうひとつの一般相対論入門(いっぱんそうたいろんにゅうもん)

2010年7月15日 第1版第1刷発行

著 者	須 藤 靖
発行者	黒 田 敏 正
発行所	株式会社 日 本 評 論 社
	〒170-8474 東京都豊島区南大塚3-12-4
	電話 (03) 3987-8621 [販売]
	(03) 3987-8599 [編集]
印 刷	藤原印刷
製 本	精光堂
装 丁	Malpu Design (清水良洋)

 Printed in Japan
ISBN 978-4-535-78634-9